Conceptos previos de la materia a considerar:
Concepto de Función. Dominio, codominio, imagen. Formas de expresar una función: mediante tablas, mediante gráficas y analíticamente. Funciones crecientes y decrecientes. Ecuación "Punto-Pendiente". Otras funciones elementales. Función cuadrática. Función valor absoluto. Función logaritmo y exponencial. Funciones racionales. Funciones potenciales y polinómicas. Asíntotas: definición, ejemplos. Cálculo de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Concepto de función continua. Continuidad en un punto. Propiedades de las funciones continuas. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Función Derivada. Cálculo de derivadas. Derivada del producto y del cociente. Derivada de una función compuesta. Tabla de derivadas. Ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva. Extremos locales (relativos) y globales (absolutos), concavidad, puntos de inflexión. Uso de herramienta gráficas Graphmatica o Winplot.

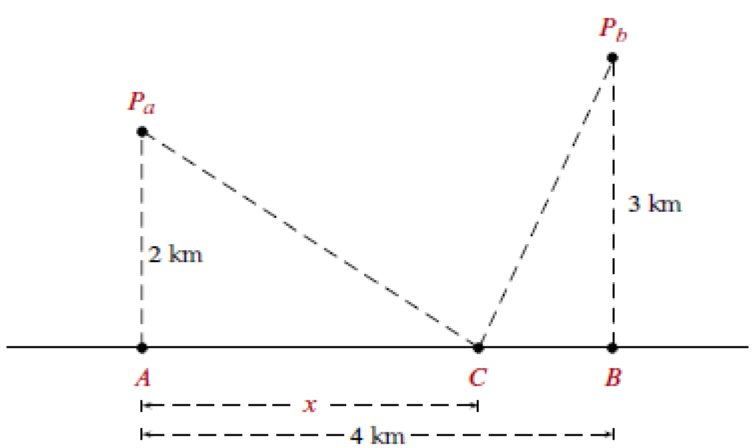
Los siguientes dos problemas serán resueltos y explicados en la clase de práctica:

Ejercicio 1

Un fabricante de productos alimenticios desea obtener el beneficio máximo teniendo en cuenta la función de ingreso total $I(x)= 4x^3+110x+10$ y la función de costo total es $C(x) = 40x^2+10x+7$. La variable x representa la cantidad del producto producido y vendido (en toneladas).
Si se gana \$1000 por tonelada ¿Cuál será el máximo beneficio?

Ejercicio 2

Dos poblados Pa y Pb están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, Para reducir gastos ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?



Guía Práctica Problemas de Máximos y Mínimos (Optimización)

Ejercicio 1
Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo. **Rta: 9 y 9**

Ejercicio 2
Si la función de costo para un productor es: $c(x) = 0.01x^2 + 5x + 100$ ¿A qué nivel de producción x se da el costo medio mínimo? **Rta: 100**

Ejercicio 3
Hallar dos números que *sumen* 9 y que el producto del cuadrado de uno por el triple del otro sea máximo. **Rta: x=6, y=3**

Ejercicio 4
La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible. **Rta: x=10, y=10, z=10**

Ejercicio 5
Los costos de una empresa están dados por la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1700 y 1800 artículos.
¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.
Rta: Es verdadero, porque el costo es mínimo cuando se venden 1.732.058 artículos.

Ejercicio 6
Una empresa tiene para uno de sus productos la función de demanda $D(x)=400 - x$ y su función de costo medio es $Cme(x) = \frac{x^2}{3} - 11x + 100 + \frac{1200}{x}$
Determinar el nivel de producción que maximice el beneficio. **Rta: x=30**

Ejercicio 7
La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 36. Hallar las dimensiones para que el volumen sea máximo. **Rta: x=3, y=3**

Ejercicio 8
Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x) en miles de pesos, viene dada en función de la cantidad que se invierte x por la siguiente expresión: $R(x)=-0.001x^2+0.4x+3.5$
a) Qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.
b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

Rta: a) 200000 pesos b) 43500 pesos

Ejercicio 9

Halle el punto de la recta $y=-2x+3$ más cercano al origen. **Rta:** $\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$

Ejercicio 10
Hallar los puntos de la curva $y^2 = x$ cuya distancia al punto $\left({}^{3}/_{2}\,,0\right)$ sea mínima.
Rta: $(1,\pm 1)$

Ejercicio 11
Una página rectangular ha de contener 24 dm^2 de texto, con márgenes superior e inferior de 1.5 dm y laterales de 1dm pulgada,
¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel? **Rta: 6x9**

Ejercicio 12
Una empresa tiene, para uno de sus productos, un costo fijo de \$500 y un costo variable de *2(0.1x + 2)* por unidad. Su función de demanda es *x=800-2x*
¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio? **Rta: x=180.91**

Ejercicio 13
Una compañía de transporte ha comprobado que el número de pasajeros diarios depende del precio del boleto según la función: *n(p)=3000-6p* donde *n(p)* es el número de pasajeros cuando p es el precio del boleto. Obtener:

a) La función que expresa los ingresos diarios de esta empresa en función del precio del billete (p).
b) El precio del boleto que hace máximo dicho ingreso.
c) ¿A cuánto ascenderá dicho ingreso máximo?

Rta: a) f(p)=3000p-6p^2 b) p=250 c) 375000

Ejercicio 14
Deseamos comprar 18 tablets y en el mercado hay de dos tipos (A y B). Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por el producto del número de tablets del tipo A que se compra por el cuadrado del número de tablets del tipo B que se adquiere. Determinar el número de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

Rta: tipo A → 6 y tipo B → 12

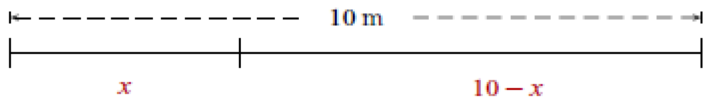
Ejercicios Optativos:

Ejercicio 15

Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:

a) Máxima

b) Mínima

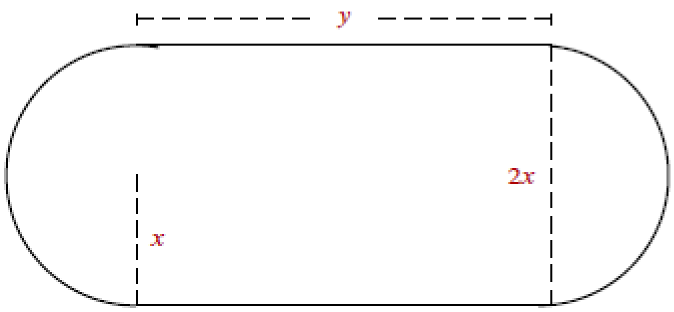


Nota: Tomar en cuenta que la parte x del alambre se usa para el cuadrado.

Rta: Mínima x=4,34965 y Máxima x=10

Ejercicio 16

Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de 50 m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.



Rta: $x = \dfrac{25}{\pi}$, $y = 0$

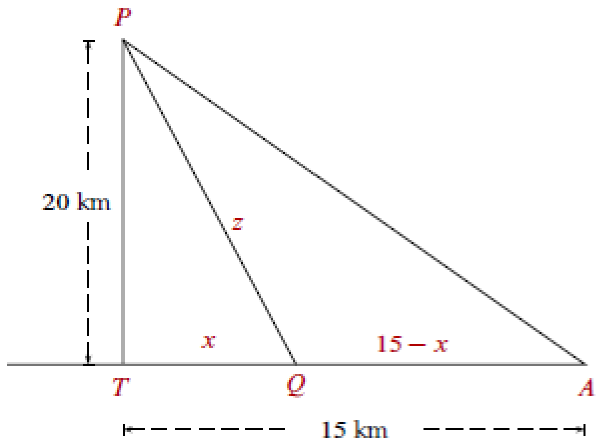
Ejercicio 17

Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 10 L en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y la superficie es $4\pi.r^3$ Encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

Rta: r=1,3365 y L=0

Ejercicio 18

Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2.000.000 de dólares y en tierra es de 1.000.000, ¿a qué distancia hacia el este debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?



Rta: $x \approx 17{,}889$

Ejercicio 19

Un rectángulo esta acotado por los ejes y por la gráfica de $y = \frac{(6-x)}{2}$

¿Qué longitud debe tener el rectángulo para que su área sea máxima? **Rta: x=3**

Ejercicio 20

Una compañía de micros alquila uno de 50 plazas a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga 60 dólares. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en un dólar por cada persona que sobrepase de las 35. Determina el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores. ¿Cuáles son dichos ingresos?

Rta: 47 o 48 personas. Ingreso de 2256 dolares