

APUNTE: Introducción a la Programación Lineal



UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO

Asignatura: Matemática 2

Carreras: Lic. en Administración

Profesor: Prof. Mabel Chrestia

Semestre: 2do

Año: 2016

Definición

La **Programación Lineal** (PL) es una técnica matemática relativamente reciente (siglo XX), que consiste en una serie de métodos y procedimientos que permiten resolver problemas de optimización.

La palabra **programación** se refiere a programar, en el sentido de cómo resolver un problema de asignación de recursos. La palabra **lineal** indica que en el planteo del problema se utilizarán ecuaciones e inecuaciones, todas ellas lineales.

Desigualdades lineales en dos variables

Una **desigualdad lineal** con las variables x e y , es una expresión que tiene alguna de las siguientes formas:

$$ax + by + c < 0$$

$$ax + by + c > 0$$

$$ax + by + c \leq 0$$

$$ax + by + c \geq 0$$

donde a , b y c son constantes y a y b no pueden ser nulas simultáneamente.

Geoméricamente, la **solución** (o gráfica) de una desigualdad de este tipo consiste en todos los puntos $(x ; y)$ del plano cuyas coordenadas satisfacen dicha desigualdad.

Por ejemplo: dada la desigualdad $2x + y - 3 < 0$, los puntos $(\frac{1}{2} ; 0)$, $(0 ; 2)$ y $(-4 ; 1)$ son algunas soluciones de esta desigualdad pues:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 0 - 3 = -2 < 0$$

$$2 \cdot 0 + 2 - 3 = -1 < 0$$

$$2 \cdot (-4) + 1 - 3 = -10 < 0$$

En cambio, los puntos $(1 ; 1)$, $(0 ; 5)$ y $(2 ; 0)$ no son soluciones pues:

$$2 \cdot 1 + 1 - 3 = 0 = 0$$

$$2 \cdot 0 + 5 - 3 = 2 > 0$$

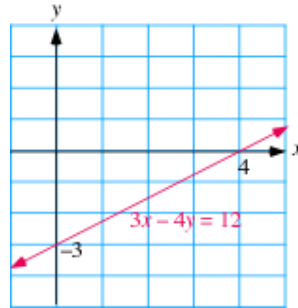
$$2 \cdot 2 + 0 - 3 = 1 > 0$$

Se ve que existe un **número infinito** de soluciones.

Para graficar la solución de una desigualdad es recomendable graficar primero la recta $ax + by + c = 0$ y luego analizar si la región del plano que verifica la desigualdad se encuentra por encima o por debajo de la recta. En caso de desigualdades estrictas, los puntos sobre la recta no formarán parte de la solución.

Ejemplo: vamos a hallar la solución de la desigualdad: $3x - 4y - 12 \leq 0$

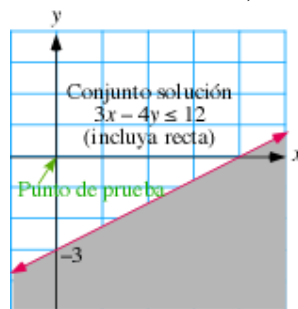
Primero graficamos la recta $3x - 4y - 12 = 0$ o bien $3x - 4y = 12$



Para saber si la solución es la región por encima o por debajo de la recta, tomamos un punto cualquiera, por ejemplo el origen (0 ; 0) y reemplazamos en la desigualdad. Si se cumple, significa que el origen pertenece a la solución. Sino, la solución es la otra región.

Para nuestro ejemplo: $3x - 4y - 12 \leq 0 \rightarrow 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 12 = -12 \leq 0$

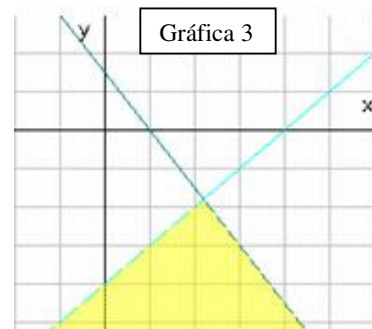
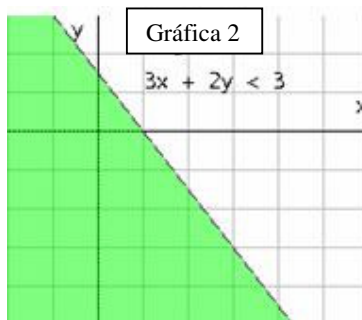
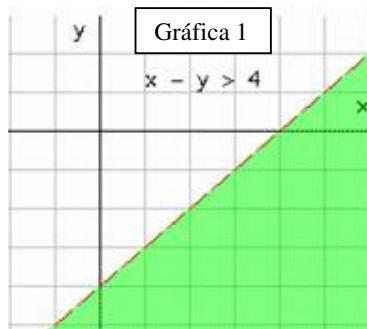
Por lo tanto, la solución, es la región por encima de la recta, incluyendo la misma recta.



Supongamos ahora que tenemos un sistema de dos desigualdades lineales en dos variables. Para hallar la solución, graficamos ambas desigualdades. La región común será la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\text{Sea el sistema } \begin{cases} x - y > 4 \\ 3x + 2y < 3 \end{cases}$$



En la Gráfica 1 se representa la solución de la primera inecuación. En la Gráfica 2 la solución de la segunda inecuación del sistema. Por último, en la Gráfica 3 se muestra la solución del sistema, que es la región común entre las dos regiones anteriores.

Aplicaciones de las desigualdades lineales

Les proponemos resolver los siguientes problemas:

1) *Juan dispone de 10\$ para comprar caramelos y chicles. Cada caramelo cuesta quince centavos y cada chicle cuesta cuarenta centavos. ¿Qué cantidad de chicles y caramelos puede comprar?*

- a) *Escribir una inecuación que describa esta situación.*
- b) *Indicar algunas posibles soluciones.*
- c) *Graficar la solución de la desigualdad.*

Solución

2) *Una agencia de turismo vende dos tipos de excursiones A y B. Para cubrir los gastos generales debe vender al menos 50 excursiones por semana, y debido a que la Secretaría de Turismo desea promocionar el destino de la excursión A, debe vender al menos el doble de excursiones tipo A que de tipo B. ¿Qué cantidad de excursiones A y B puede vender para cumplir con lo solicitado?*

- a) *Escribir un sistema de desigualdades para describir la situación.*
- b) *Graficar la región que representa la solución de este sistema.*
- c) *Indicar algunas posibles soluciones.*

Solución

Programación Lineal

La **Programación Lineal** (PL) es un procedimiento o algoritmo matemático que consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, denominada **función objetivo**, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una **serie de restricciones** que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

Por ejemplo, puede ser el caso de un fabricante que desee maximizar su función de utilidad sujeta a las restricciones de producción que imponen las limitaciones sobre el uso de la maquinaria y la mano de obra.

Definiremos algunos conceptos previamente:

Función objetivo

Es una expresión matemática lineal que representa el objetivo del problema. Es la función que se desea maximizar o minimizar. Tiene la siguiente forma:

$$Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

donde $a_i \in R$; x_i son las variables

Conjunto de restricciones

Es un conjunto de ecuaciones o inecuaciones lineales que representan las limitaciones del problema. Cada restricción tiene la siguiente forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

o bien $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < b$

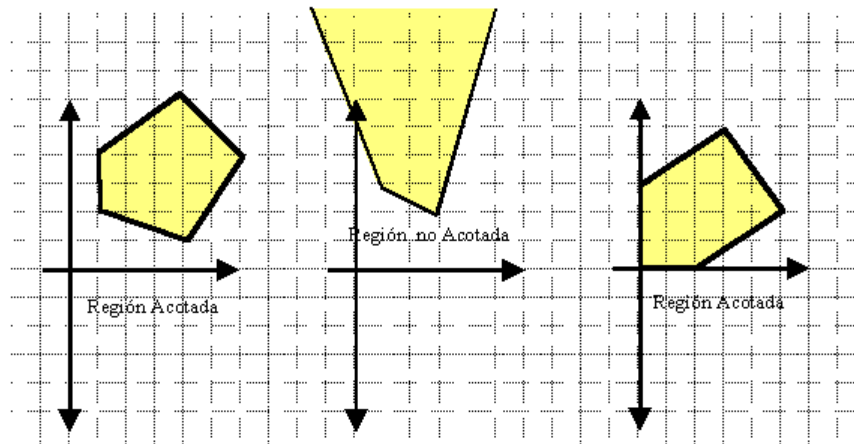
o bien $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$

o bien $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > b$

o bien $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$

Región factible

Es la región solución del conjunto de restricciones. Puede ser acotada o no, dependiendo de las inecuaciones.



Solución posible

Es cualquier conjunto de valores de las variables que satisface el conjunto de restricciones.

Solución óptima

Es aquella solución posible que optimiza la función objetivo.

Resolución de un problema de PL

Se recomienda seguir ciertos pasos en la resolución de un problema de PL. Veamos un ejemplo resuelto donde se detallan esos pasos.

Una compañía fabrica dos productos X e Y. Cada uno de estos productos requiere cierto tiempo en la línea de ensamblado y otro tiempo más en el departamento de acabado. Cada artículo del tipo X necesita 5 hs. de ensamblado y 2 hs. de acabado, mientras que cada artículo del tipo Y requiere 3 hs. de ensamblado y 4 de acabado. En cualquier semana, la empresa dispone de 105 hs. en la línea de ensamblado y 70 hs. en el departamento de acabado. La empresa puede vender todos los artículos que produce y obtener una utilidad de 200\$ por cada artículo de X y 160\$ por cada artículo de Y.

- a) *Calcular el número de artículos de cada tipo que deberían fabricarse a la semana con objeto de maximizar la utilidad total.*
- b) *Hallar a cuánto asciende esa utilidad total.*

Primer paso: Tabular los datos

Ordenamos la información brindada por el enunciado del problema, obteniendo la siguiente tabla:

	<i>Ensamblado</i>	<i>Acabado</i>	<i>Utilidad</i>
X	5	2	200
Y	3	4	160
<i>Disponibilidad</i>	105	70	

Segundo paso: Definir las variables

Es fundamental tener en claro cuántas variables necesitaremos y el significado de cada una. Para este ejemplo definimos:

x: cantidad de artículos del tipo X

y: cantidad de artículos del tipo Y

Tercer paso: Escribir la función objetivo

A continuación, escribimos la expresión de la función que deseamos optimizar, en este caso la función utilidad:

$$Z = 200x + 160y$$

Cuarto paso: Escribir el conjunto de restricciones

En base a la información tabulada, armamos las inecuaciones. La primera está referida al tiempo de ensamblado. La segunda al tiempo de acabado. La tercera es necesaria, ya que x e y representan cantidades, por lo tanto, deben ser valores no negativos.

$$5x + 3y \leq 105 \quad ; \quad 2x + 4y \leq 70 \quad ; \quad x, y \geq 0$$

Quinto paso: Escribir el resumen del problema

Resumimos la función objetivo y las restricciones, obteniendo:

Maximizar	$Z = 200x + 160y$
s.a:	$\begin{cases} 5x + 3y \leq 105 \\ 2x + 4y \leq 70 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

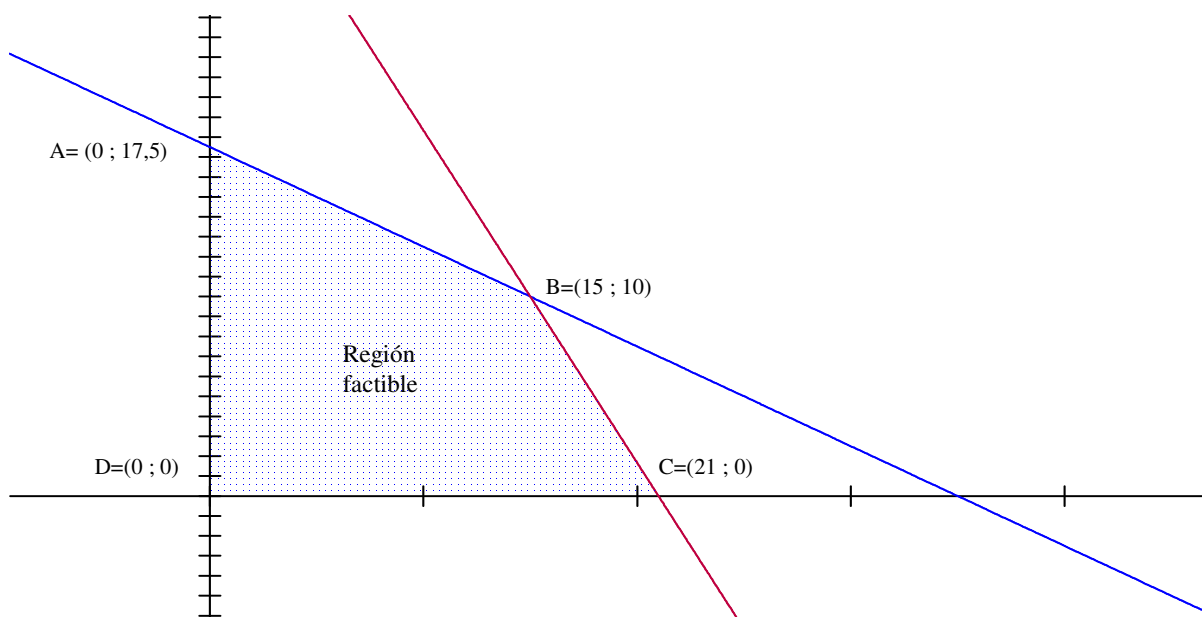
s.a. significa “sujeta a”

Sexto paso: Resolver

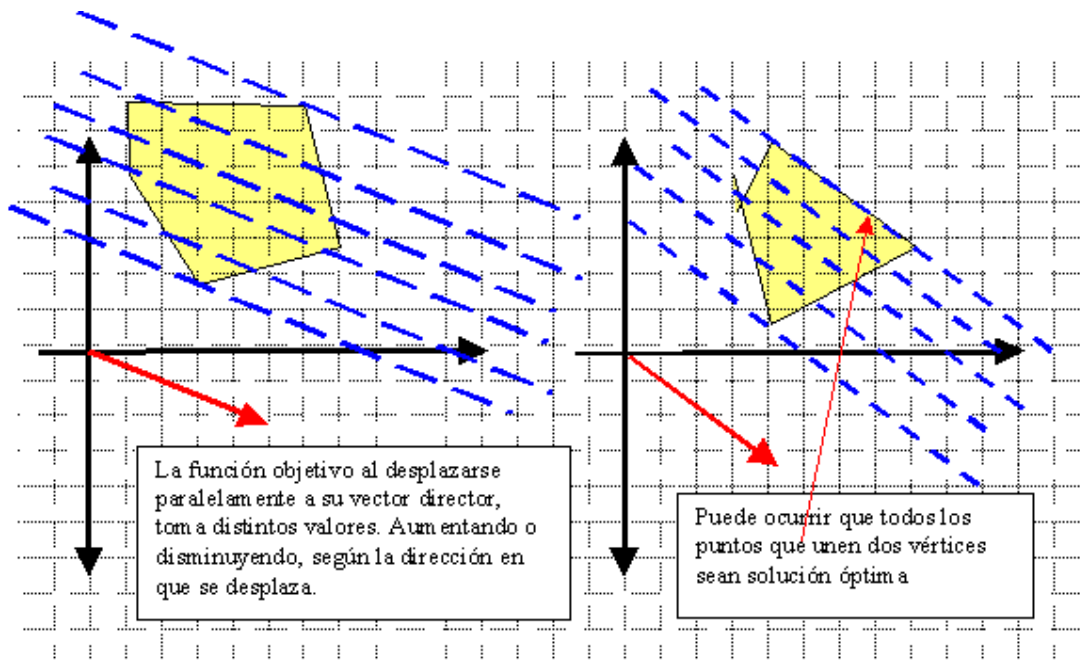
Veremos dos métodos de resolución: el método gráfico y el método analítico.

a) Método gráfico

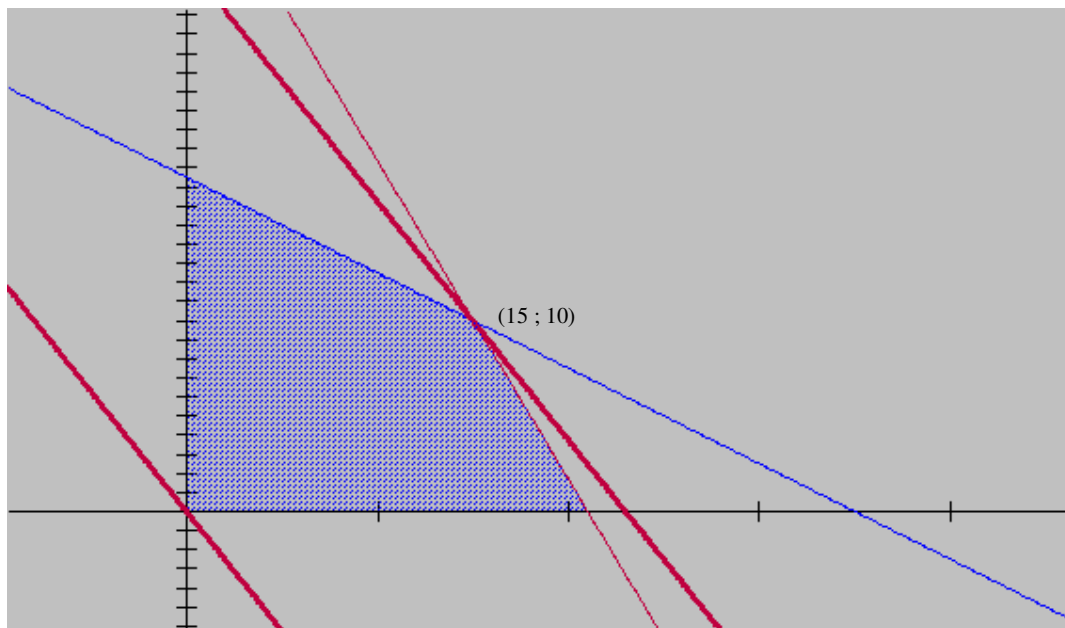
Este método permite resolver problemas de dos variables. Se grafican las restricciones, hallando la región factible. Cualquier punto dentro de esta región es una solución posible del problema. La solución óptima se encuentra en uno de los vértices del polígono.



Para obtener cuál es el vértice que da la solución óptima, igualamos a cero la función objetivo y se la hace pasar por el origen. Esta recta se llama “vector director”. Luego se trazan paralelas al vector director que pasen por los distintos vértices. La recta paralela que pasa por el último vértice nos indica que éste es el punto que maximiza la función objetivo, y el punto más cercano es el que la minimiza.



Para nuestro ejemplo obtenemos lo siguiente:



Las rectas marcadas con trazo más grueso son la función objetivo que pasa por el origen (vector director) y una paralela que pasa por el último vértice del polígono, el punto (15 ; 10). Por lo tanto, este es el punto que maximiza la función objetivo. Es decir, deben fabricarse 15 unidades del artículo X y 10 unidades del artículo Y para obtener la mayor utilidad.

Para responder a la pregunta del inciso b), reemplazamos estos valores de x e y hallados en la función objetivo, y encontramos a cuánto asciende la utilidad total máxima.

$$Z = 200x + 160y \rightarrow Z = 200 \cdot 15 + 160 \cdot 10 \rightarrow \boxed{Z = 4600}$$

b) Método analítico

Para resolver el problema en forma analítica, primero debemos transformar el conjunto de restricciones en igualdades. Para esto agregamos nuevas variables (llamadas variables *slacks*).

Es decir:

$$\begin{cases} 5x + 3y \leq 105 \\ 2x + 4y \leq 70 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 3y + t = 105 \\ 2x + 4y + u = 70 \\ x, y, t, u \geq 0 \end{cases}$$

Ahora iremos anulando de a dos variables, y resolviendo el sistema de ecuaciones que nos quede. Por ejemplo, si anulamos x e y nos queda $t=105$, $u=70$. Resolviendo la función objetivo en este caso nos da $Z=0$. El punto correspondiente del gráfico es el origen $(0; 0)$.

Ahora anulamos x y t . Entonces nos queda $3y=105$; $4y+u=70$. Es decir: $y=35$; $u=-70$. Este es un caso “no factible” ya que obtuvimos una variable con valor negativo, por lo tanto se descarta. Corresponde a un punto fuera de la región factible.

La siguiente tabla muestra la resolución analítica completa:

Variables anuladas	Sistema de ecuaciones	Solución	Valor de la función objetivo	Punto en la gráfica
$x \quad y$	$\begin{cases} t = 105 \\ u = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} t = 105 \\ u = 70 \end{cases}$	$Z = 0$	$D = (0; 0)$
$x \quad t$	$\begin{cases} 3y = 105 \\ 4y + u = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 35 \\ u = -70 \end{cases}$	No factible	Fuera de la región factible
$x \quad u$	$\begin{cases} 3y + t = 105 \\ 4y = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} t = 52,5 \\ y = 17,5 \end{cases}$	$Z = 2800$	$A = (0; 17,5)$
$y \quad t$	$\begin{cases} 5x = 105 \\ 2x + u = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 21 \\ u = 28 \end{cases}$	$Z = 4200$	$C = (21; 0)$
$y \quad u$	$\begin{cases} 5x + t = 105 \\ 2x + 4y = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} t = -70 \\ x = 35 \end{cases}$	No factible	Fuera de la región factible
$t \quad u$	$\begin{cases} 5x + 3y = 105 \\ 2x + 4y = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$	$Z = 4600$	$B = (15; 10)$

Vemos que llegamos al mismo resultado que en forma gráfica: el punto que optimiza la función de utilidad Z es el punto $B = (15; 10)$.

Problemas propuestos

Resolver cada uno de los siguientes problemas indicando todos los pasos y por ambos métodos.

1) Una compañía produce dos tipos de abrelatas: manuales y eléctricos. Para su fabricación cada uno requiere del uso de tres máquinas A, B y C. Para fabricar un abrelatas manual se necesitan dos horas de uso de la máquina A, una hora de la B y una hora de la C. Para fabricar un abrelatas eléctrico se requiere una hora de la máquina A, dos horas de la B y una hora de la C. El número máximo de horas disponibles por mes para uso de las máquinas A, B y C es de 180, 160 y 100 horas respectivamente. La ganancia por un abrelatas manual es de 4UM y por uno eléctrico es de 6UM. Si la compañía vende todos los abrelatas que puede producir, ¿cuántos de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias mensuales?

2) Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M1 y M2. Para fabricar 1 tonelada de A hacen falta 500 kg de M1 y 750 kg de M2, mientras que las cantidades de M1 y M2 utilizadas para fabricar 1 tonelada de B son 800 kg y 400 kg, respectivamente. Le empresa tiene contratado un suministro máximo de 10 toneladas de cada materia prima y vende a 1000 dólares y 1500 dólares cada tonelada de abono A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son estos?

3) Un nutricionista asesora a un individuo que sufre una deficiencia de hierro y vitamina B, y le indica que debe ingerir al menos 2400 mg de hierro, 2100 mg de vitamina B-1 (tiamina) y 1500 mg de vitamina B-2 (riboflavina) durante cierto período de tiempo. Existen dos píldoras de vitaminas disponibles, la marca A y la marca B. Cada píldora de la marca A contiene 40 mg de hierro, 10 mg de vitamina B-1, 5 mg de vitamina B-2 y cuesta 6 UM. Cada píldora de la marca B contiene 10 mg de hierro, 15 mg de vitamina B-1 y 15 mg de vitamina B-2, y cuesta 8 UM. ¿Cuáles combinaciones de píldoras debe comprar el paciente para cubrir sus requerimientos de hierro y vitamina B al menor costo?

Bibliografía consultada para el armado de este apunte:

- a) HAEUSSLER, JR. *Matemáticas para la administración y economía*. Editorial Pearson. México, 2008.
- b) JAGDISH, C. ARYA, *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía*, Editorial Pearson, México, 2002
- c) <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Summary4.html>
- d) <http://www.vadenumeros.es/primerograticas-de-inecuaciones.htm>
- e) http://www.investigacion-operaciones.com/Grafica_Inecuaciones.htm