APUNTE: Extremos condicionados – Multiplicadores de Lagrange

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 2
Carreras: Lic. en Administración
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 2do
Año: 2016

Extremos condicionados

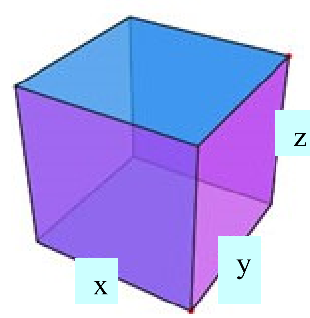
Hemos visto anteriormente cómo hallar los extremos (máximos, mínimos o puntos silla) de una función de varias variables. Ahora estudiaremos el modo de encontrar un extremo, pero cuando la función debe cumplir una cierta condición. En este caso, diremos que buscaremos los "extremos condicionados" dejando el nombre de "extremos libres" para los casos en los que la función no está sujeta a ninguna restricción.

Veremos cómo proceder mediante un ejemplo.

Supongamos la siguiente situación:

Una empresa desea fabricar un envase de forma rectangular sin tapa para su producto. Dicho recipiente debe tener un volumen de 62,5 cm^3, pero desea que su superficie total sea la mínima posible, ya que el material empleado es caro y no puede desaprovecharlo. ¿Qué medidas debe tener ese recipiente para gastar lo menos posible de material en su fabricación?

La función que se desea optimizar, en este caso minimizar, es el área del envase rectangular, que viene determinado por la suma de las superficies de sus caras. Si "x" es el ancho, "y" es el largo y "z" la altura del envase, entonces la función a minimizar será:



$$\boxed{S = f(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy} \quad (1)$$

La restricción es el volumen del recipiente, que debe ser de 62, 5 cm^3.

Por lo tanto tendremos que:

$$\boxed{x \cdot y \cdot z = 62{,}5} \text{ o bien } \boxed{g(x,y,z) = x \cdot y \cdot z - 62{,}5 = 0} \quad (2)$$

Veamos ahora cómo resolver este problema.

Despejemos una de las variables de la función de restricción, por ejemplo, la "z":

$$\boxed{z = \frac{62{,}5}{x \cdot y}} \quad (3)$$

Ahora sustituimos este valor de “z” en la función a optimizar S, quedando entonces esta función sólo de dos variables, y no de tres como era inicialmente:

$$S = f(x,y) = 2x \cdot \frac{62{,}5}{x \cdot y} + 2y \cdot \frac{62{,}5}{x \cdot y} + xy \;\Rightarrow\; \boxed{S = f(x,y) = \frac{125}{y} + \frac{125}{x} + xy}$$

Hallamos las derivadas parciales de esta función, respecto a “x” y a “y”:

$$f_x(x,y) = -\frac{125}{x^2} + y \quad ; \quad f_y(x,y) = -\frac{125}{y^2} + x$$

Igualamos a cero estas derivadas, para hallar los puntos críticos:

$$-\frac{125}{x^2} + y = 0 \quad ; \quad -\frac{125}{y^2} + x = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{125}{x^2} \;\Rightarrow\; -\frac{125}{\left(\frac{125}{x^2}\right)^2} + x = 0$$

$$\Rightarrow\; x - \frac{x^4}{125} = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot \left(1 - \frac{x^3}{125}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 0} \text{ ó } \boxed{x = \sqrt[3]{125} = 5}$$

Como las variables son longitudes, deben ser positivas. Por lo tanto $\boxed{x = 5} \Rightarrow \boxed{y = 5}$

De la ecuación (3) surge que: $\boxed{z = 2{,}5}$

Entonces el punto crítico es $\boxed{(x;y) = (5;5)}$.

Veamos que este punto crítico es un mínimo. Hallamos las derivadas segundas parciales, y armamos el Hessiano:

$$f_{xx} = \frac{250}{x^3} \;\Rightarrow\; f_{xx}(5;5) = \frac{250}{5^3} = 2 \quad ; \quad f_{yy} = \frac{250}{y^3} \;\Rightarrow\; f_{yy}(5;5) = \frac{250}{5^3} = 2 \quad ; \quad f_{xy} = f_{yx} = 1$$

$$\Rightarrow\; \boxed{H(5;5) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3}$$

Como $\boxed{H > 0}$, y , $\boxed{f_{xx}(5;5) > 0}$ entonces, según el criterio de las segundas derivadas parciales, hay un **mínimo** en el punto (5 ; 5).

Luego, las medidas que minimizan la superficie del envase son: **5 cm para el ancho y el largo, y 2,5 cm para la altura.**

Multiplicadores de Lagrange

En general, el método anterior no puede aplicarse cuando tenemos muchas variables, o bien, cuando no puede despejarse una variable de la función de restricción. Por eso se utiliza otra manera de resolver este tipo de problemas. El método más utilizado es el conocido como Método de los Multiplicadores de Lagrange.

Resolvamos el problema anterior mediante este método. Para ello debemos definir una nueva función a la que llamaremos F, que tiene los mismos parámetros de f más un nuevo parámetro λ.

Esta función F se define así:

$$\boxed{F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda \cdot g(x,y,z)} \quad (4)$$

Reemplazando por (1) y (2) obtenemos:

$$\boxed{F(x,y,z,\lambda) = 2xz + 2yz + xy - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 62{,}5)}$$

Hallamos ahora las derivadas parciales de F, y las igualamos a cero:

$$\begin{cases} F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z + y - \lambda yz = 0 & (5) \\ F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z + x - \lambda xz = 0 & (6) \\ F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y - \lambda xy = 0 & (7) \\ F_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad -x \cdot y \cdot z + 62{,}5 = 0 & (8) \end{cases}$$

De (5) obtenemos que $z(2-\lambda y) = -y$ ➔ $\boxed{z = \dfrac{-y}{2-\lambda y}}$

De (6) obtenemos que $z(2-\lambda x) = -x$ ➔ $\boxed{z = \dfrac{-x}{2-\lambda x}}$

Igualando las dos ecuaciones anteriores obtenemos: $\boxed{\dfrac{-y}{2-\lambda y} = \dfrac{-x}{2-\lambda x}}$ ➔ $\boxed{-y(2-\lambda x) = -x(2-\lambda y)}$

➔ $\boxed{-2y + \lambda xy = -2x + \lambda xy}$ ➔ $\boxed{x = y}$

De (7) obtenemos que $2x + 2y - \lambda xy = 0$ ➔ $2x + 2x - \lambda x^2 = 0$ ➔ $4x - \lambda x^2 = x(4 - \lambda x) = 0$ ➔

$x = 0$ ó $x = \dfrac{4}{\lambda}$. Como x es el ancho del envase, no puede ser cero.

Luego: $\boxed{x = \dfrac{4}{\lambda}}$ ➔ $\boxed{y = \dfrac{4}{\lambda}}$

Como, por (6) $\boxed{z = \dfrac{-y}{2-\lambda y}}$ ➔ $\boxed{z = \dfrac{-\frac{4}{\lambda}}{2-\lambda\left(\frac{4}{\lambda}\right)}}$ ➔ $\boxed{z = \dfrac{2}{\lambda}}$

De (8) obtenemos que: $x \cdot y \cdot z = 62{,}5$ ➔ $\dfrac{4}{\lambda}\cdot\dfrac{4}{\lambda}\cdot\dfrac{2}{\lambda} = 62{,}5$ ➔ $\dfrac{32}{62{,}5} = \lambda^3$ ➔ $\boxed{\lambda = 0{,}8}$

Por lo tanto: $\boxed{x = 5}$, $\boxed{y = 5}$, $\boxed{z = 2{,}5}$.

Luego, el único punto crítico de f sujeto a la restricción dada, es (5 , 5). En este punto puede existir un máximo, un mínimo, o ninguno de éstos. El método de los multiplicadores de Lagrange no indica directamente qué es. Para averiguarlo realizamos un paso adicional, el cual consiste en construir el denominado “Hessiano orlado”.

El _Hessiano orlado_

Es el determinante de la matriz formada por las segundas derivadas parciales de la función $F(x, y, z, \lambda)$, y las primeras derivadas parciales de la función restricción $g(x, y, z)$, de la siguiente forma:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

Este determinante se evalúa en el punto (5 ; 5 ; 2,5). Si es positivo, significa que el punto crítico condicionado es un máximo, y si es negativo es un mínimo. Para nuestro ejemplo, veremos que $\overline{H} < 0$.

Calculemos las derivadas parciales segundas de F y las evaluamos en el punto:

$$\begin{cases} F_{xx} = 0 \\ F_{yy} = 0 \\ F_{xy} = F_{yx} = 1 - \lambda z = 1 - 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Calculemos las derivadas parciales de g y las evaluamos en el punto:

$$\begin{cases} g_x = yz = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \\ g_y = xz = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \end{cases}$$

Ahora escribimos el Hessiano orlado:

$$\overline{H}(5;5) = \begin{vmatrix} 0 & 12{,}5 & 12{,}5 \\ 12{,}5 & 0 & -1 \\ 12{,}5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -312{,}5 < 0$$

Luego, hay un mínimo en (5 ; 5 ; 2,5).

Generalización del método de los multiplicadores de Lagrange (con una única restricción)

Dada una función *f(x,y,z,...)* sujeta a una restricción *g(x,y,z,...)*, se desea encontrar el o los puntos en los cuales *f* es mínima o máxima.

1) Definimos una nueva función *F* (llamada *función lagrangeana*) de la siguiente manera:

$$\boxed{F(x,y,z,...,\lambda) = f(x,y,z,...) - \lambda \cdot g(x,y,z,...)}$$

donde el parámetro λ se denomina *multiplicador de Lagrange*.

2) Hallamos las derivadas parciales de *F* y las igualamos a cero:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ ..... \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

3) Resolvemos el sistema, obteniendo el valor del parámetro λ. Las demás variables *x, y, z, ...* deben quedar escritas en función de este parámetro.

4) Hallamos los valores de las variables *x, y, z, ...* Es decir, los puntos críticos condicionados.

5) Hallamos las derivadas parciales de la restricción $g(x,y,z,...)$.

6) Hallamos las derivadas parciales segundas de la función $F(x,y,z,...,\lambda)$.

7) Construimos el "Hessiano orlado" para clasificar estos puntos obtenidos en máximos o mínimos.

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y & ... \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} & ... \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} & ... \\ ... & ... & ... & \end{vmatrix}$$

6) Evaluamos el Hessiano orlado en cada uno de los puntos críticos condicionados (a;b).
Entonces:

i) Si $\overline{H} < 0$ entonces hay un MINIMO en $(a;b)$.
ii) Si $\overline{H} > 0$ entonces hay un MAXIMO en $(a;b)$.

Aplicaciones económicas

Veremos a continuación cómo aplicar el método de los Multiplicadores de Lagrange a un problema en el cual debemos optimizar una función económica, sujeta a una restricción presupuestaria.

Sea el siguiente problema:

> *El nivel de satisfacción de un consumidor al comprar las cantidades x e y de dos artículos A y B está dado por la expresión $U = f(x, y) = x \cdot y$. Si la renta del consumidor es de 100 U.M. y los precios unitarios de los bienes A y B son 2 U.M. y 5 U.M. respectivamente, determinar la combinación de las cantidades x e y que hagan máxima la utilidad, y que pueda adquirir el consumidor con la renta mencionada.*

Solución:

La función a maximizar es la función de utilidad $\boxed{f(x, y) = x \cdot y}$ sujeta a la restricción presupuestaria $\boxed{2x + 5y = 100}$. Es decir, $\boxed{g(x, y) = 2x + 5y - 100 = 0}$

Armamos la función lagrangeana: $F(x, y, z, \lambda) = x \cdot y - \lambda(2x + 5y - 100)$

Hallamos las derivadas parciales de esta función, y las igualamos a cero:

$$\begin{cases} F_x = y - 2\lambda = 0 \\ F_y = x - 5\lambda = 0 \\ F_\lambda = 2x + 5y - 100 = 0 \end{cases}$$

Hallamos los valores de x, y, λ:

$x = 5\lambda$; $y = 2\lambda$ ➔ $2 \cdot 5\lambda + 5 \cdot 2\lambda - 100 = 0$ ➔ $20\lambda = 100$ ➔ $\boxed{\lambda = 5}$

Por lo tanto: $\boxed{x = 25}$: $\boxed{y = 10}$. El punto crítico condicionado es entonces (25 ; 10).

Calculamos las derivadas parciales segundas de F y las evaluamos en este punto:

$$\begin{cases} F_{xx} = 0 \\ F_{yy} = 0 \\ F_{xy} = F_{yx} = 1 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas parciales de g y las evaluamos en el punto:

$$\begin{cases} g_x = 2 \\ g_y = 5 \end{cases}$$

Construimos el Hessiano orlado:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

Por lo tanto, el punto (25 ;10) es un máximo. Entonces, con una renta de 100 U.M., si el consumidor adquiere 25 unidades del artículo A y 10 unidades del B, obtendrá la máxima utilidad.