**TRABAJO PRÁCTICO Nº 9: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**
**ASIGNATURA: MATEMATICA II (Lic. Adm.) – AÑO: 2016**

1) Representar los siguientes puntos en el espacio: $(1;2;3)$ ; $(-1;-2;3)$ ; $(0;0;4)$ ; $(2;-2;-5)$

2) Completar con: $\in R$ , $\in R^2$ , $\in R^3$ , $\subset R$ , $\subset R^2$ ó $\subset R^3$ , según corresponda.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4$ …………………. | $[-1;8)$ …………………. | $(-2;-2;-2)$ …………………. | El punto $(-5;1)$ ……… |
| $N$ …………………. | $[0;1)\cup(1;2]$ ……………… | $(0;100;200)$ ……………. | $(-\infty;9)$ …………….. |

3) Completar con: $\in R$ , $\in R^2$ , $\in R^3$ , $\subset R$ , $\subset R^2$ ó $\subset R^3$ , según corresponda.

$\{$*el conjunto de los puntos que están sobre la recta* $y = 2x+3\}$…………………
$\{$*el conjunto de los puntos interiores al círculo de centro en el origen y radio* $4\}$…………………….
$\{$*el conjunto de los puntos que están sobre la esfera de centro en el origen y radio* $4\}$……………….

4) En los siguientes ejemplos indicar cuál es la variable dependiente y cuál o cuáles las independientes:
a) El valor del alquiler de una película en un video depende de si es o no un estreno.
b) Sabiendo la distancia recorrida y la velocidad del automóvil (a mayor velocidad, mayor consumo de nafta), puedo calcular el gasto de un viaje desde Bariloche a Buenos Aires.
c) El precio de un boleto en avión a Buenos Aires depende del horario de vuelo, de si es clase turista o primera, de la forma de pago y de si es para un adulto o para un niño.
d) El costo de producción es el costo total que se tiene al producir las cantidades $q_1$ y $q_2$ de dos artículos A y B.
e) La demanda de la carne de pollo está en función del precio de kg. de pollo y del precio del kg.de carne vacuna.
f) La probabilidad de que un número elegido salga en un sorteo depende de la cantidad de números que se sortean.

5) Hallar y graficar el dominio de las siguientes funciones de dos variables:

a) $z = f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$ b) $z = f(x,y) = \ln(x+y)$

c) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ d) $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{2-y^2}$

6) De las funciones anteriores, si es posible, hallar $f(0,0)$, $f(0,5)$, $f(-1,3)$, $f(1,1)$

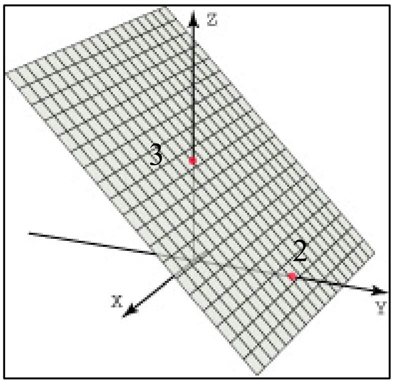
7) Dada la siguiente función de tres variables, $w = f(x,y,z) = x^3 - 4yz$

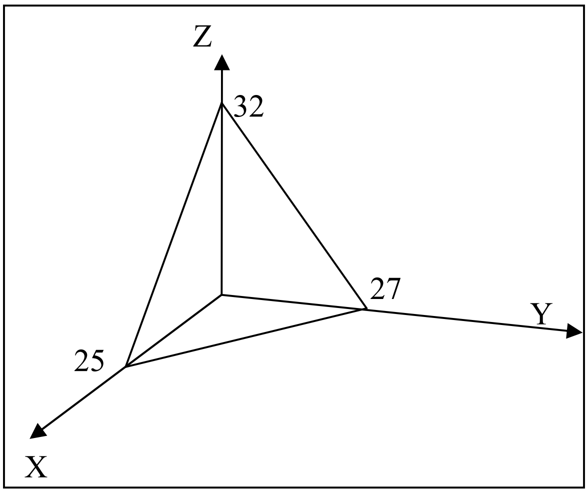
a) hallar el dominio.

b) hallar $f(0,0,0)$, $f(0,5,1)$, $f(-1,3,-4)$, $f\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$

8) Graficar los siguientes planos: a) $3x-5y+2z=1$ b) $5x+z=10$ c) $2x-y=8$

9) ¿Cuáles son las ecuaciones de los siguientes planos?




10) Hallar y graficar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = f(x,y) = x + y$  b) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$  c) $z = f(x,y) = x \cdot y$  (*) d) $z = f(x,y) = x^2 \cdot y$

11) La producción de un bien está dado por $z = f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$, donde x e y son las cantidades de los factores de producción X e Y respectivamente.

a) Representar las curvas de nivel para z = 1, z = 2 y z = 3.
b) ¿Cómo se llaman estas curvas de nivel? ¿Qué significado tienen?

12) Dada la función de producción $z = 6xy$, donde x es el número de máquinas usadas e y es el número de horas-hombre, se pide:

a) Determinar las curvas de producción constante para z=6, z=18 y z=30. Representar gráficamente.
b) Si se desea obtener un volumen de producción de 300 unidades y se dispone de dos máquinas, ¿cuántas horas-hombre se necesitan?
c) Si se deben producir 6000 unidades con 200 horas-hombre, ¿cuántas máquinas se deben utilizar?

13) Suponga que la utilidad obtenida por un consumidor de $x$ unidades de un artículo e $y$ unidades de un segundo artículo, está dada por la función de utilidad $\boxed{U(x,y) = x^{3/2} \cdot y}$. Si el consumidor posee actualmente 16 unidades del primer artículo y 30 del segundo:

a) Encuentre el nivel actual de utilidad del consumidor.
b) Dibuje la curva de indiferencia correspondiente.
c) Encuentre otro par de valores (x;y) para el cual se obtenga la misma utilidad. ¿Se encuentra este punto sobre la gráfica anterior? ¿Por qué?

14) Suponga que la función de producción de un artículo está dada por: $\boxed{z = f(x,y) = 2x + 3y}$ donde $x$ e $y$ son las cantidades de los dos insumos $X$ e $Y$.

a) Determinar las curvas de nivel (isocuantas), para los valores de producción 1, 2 y 3.
b) Representarlas gráficamente.
c) Si se desea obtener un nivel de producción igual a 26, y se utilizan 4 unidades del insumo $X$, calcular la cantidad requerida del insumo $Y$.

15) Suponga que la función de producción de un artículo está dada por: $\boxed{z = f(x,y) = x^2 + y}$ donde $x$ e $y$ son las cantidades de los dos insumos $X$ e $Y$.

a) Determinar las curvas de nivel (isocuantas), para los valores de producción 10, 15 y 20.
b) Representarlas gráficamente.
c) Si se desea obtener un nivel de producción igual a 100, y se utilizan 8 unidades del insumo $X$, calcular la cantidad requerida del insumo $Y$.

16) Una empresa automotriz fabrica dos modelos de auto. Por unidad, el modelo "A" implica un costo de $16000 en materiales y $4000 en mano de obra, vendiéndose a $30000. Por otra parte, producir cada unidad del modelo "B" cuesta $22000 en materiales y $8000 en mano de obra, siendo su precio de venta $45000. La empresa tiene costos fijos diarios de $2000.

a) determine las funciones de costo, ingreso y beneficio diario de la empresa.
b) determine las ecuaciones y grafique las curvas de isocosto, isoingreso y de indiferencia.

17) Una compañía puede describir su producción a través de la función $Q(K;L) = 60.(4.(K^2 + L^2))^{1/2}$ donde K y L representan las cantidades de factores utilizadas de capital y mano de obra, respectivamente. Determinar la isocuanta correspondiente a un nivel de producción de 4800 unidades y representarla gráficamente.

18) El precio de un piso P en función de la superficie S y de la calidad de los materiales C viene dado por una función P(S,C ) . ¿Es razonable que $\delta P/\delta C > 0$? ¿Es razonable que $\delta P/\delta S < 0$? Justificar.

19) Sean las funciones i) $f(x,y) = x^5y^2 - 3x^2y + 7x$ ii) $f(x,y) = 2x - \ln(x^2 + y^2)$

a) Hallar $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$.
b) Verificar que las derivadas parciales segundas mixtas son iguales.
c) Evaluar las derivadas del inciso a) en los puntos $(1,3)$ y $(-1,0)$.

20) Para las siguientes funciones de costos conjuntos de dos artículos X e Y, encuentre los costos marginales para el nivel de producción indicado en cada caso. Interprete los resultados.
a) $C(x;y) = 7x + 0{,}3y^2 + 2y + 900$ ; $x = 20$ ; $y = 30$ b) $C(x,y) = x \cdot \sqrt{x+y} + 5000$ ; $x = 40$ ; $y = 60$

21) Calcular las funciones de productividades marginales para las siguientes funciones de producción $P(L,K)$ para los valores indicados:

a) $P(L,K) = 20L - 2L^2 + 10LK + 5K - 4K^2$ ; $L = 10$ ; $K = 8$
b) $P(L,K) = 1000L^{0,25} \cdot K^{0,75}$ ; $L = 200$ ; $K = 50$

22) Las demandas $x_A$ y $x_B$ de dos productos A y B están dadas por las funciones:

$$x_A = 20 - 3p_A + p_B \quad ; \quad x_B = 30 + 2p_A - 5p_B$$

En donde $p_A$ y $p_B$ son los precios unitarios de A y B respectivamente. Determinar las cuatro funciones de demanda marginal, e investigar si los productos son competitivos o complementarios entre sí.

23) Dada la función de demanda $x(p_A; p_B) = 250 + 0{,}3p_B - 5{p_A}^2$ para el artículo A relacionado con el artículo B, determinar las elasticidades parciales de la demanda respecto de $p_A$ y $p_B$ cuando $p_A = 6$ y $p_B = 50$. Interpretar el resultado. Identifique cuál de ambas elasticidades es la <u>elasticidad cruzada</u>.

24) Idem ejercicio anterior siendo $x(p_A; p_B) = \dfrac{250}{p_A \cdot \sqrt{p_B}}$ ; $p_A = 5$ ; $p_B = 4$. (optativo)

25) Sean las funciones de demanda $\boxed{x_A = 50 + 6p_B - 3{p_A}^2}$ y $\boxed{x_B = 125 - 8p_B + 3p_A}$ en donde $p_A$ y $p_B$ son los precios unitarios de los artículos A y B respectivamente.

a) Determinar las 4 funciones de demanda marginal.
b) Indicar si los productos son competitivos o complementarios entre si.
c) Calcular las elasticidades parciales cruzadas para $\boxed{p_A = 1}$ y $\boxed{p_B = 2}$.

26) La función de producción: $\boxed{Q(K;L) = 8L - L^2 + 3L + 50K - K^2}$ describe la cantidad producida de un artículo dado en términos de las cantidades de los respectivos insumos: capital (K) y trabajo (L), en unidades standard apropiadas.

a) Determine las productividades marginales respecto al capital y al trabajo, para K=5 y L=2.
b) Calcule la elasticidad parcial de la producción respecto al capital (para K=5 y L=2).
c) ¿Cuál es la variación porcentual de la producción si se aumenta 1% el capital?

27) Una empresa puede elaborar un producto en dos plantas de producción diferentes. El costo de producir "*x*" unidades en la planta "*A*" e "*y*" unidades en la planta "*B*" esta dado por la función conjunta de costo:
$C(x;y) = x^2 + 2.y^2 + 5.x.y + 700$; encuentre:
a) el costo de producir 8 unidades en la planta A y 10 unidades en la planta B.

b) los respectivos costos marginales para el nivel de producción: x=8; y=10; e interprete.

28) Una empresa produce dos tipos de productos, "*A*" y "*B*". El costo diario total (en pesos) de producir "*x*" unidades de "*A*" e "y" unidades de "B" esta dado por la función:
$C(x;y) = 250 - 4.x - 7.y + 0,2 . x^2 + 0,1 . y^2$
Si además puede vender cada unidad de "*A*" a \$20 y cada unidad de "B" a \$16, determine la función de utilidades de la empresa.

29) Hallar los extremos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y + 1$

b) $f(x,y) = x^2 + y^4$

c) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

e) $f(x,y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$

f) $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

30) El beneficio que se obtiene produciendo x unidades del modelo A e y unidades del modelo B se aproxima mediante el modelo $P(x,y) = 8x + 10y - 0{,}001 \cdot \left(x^2 + xy + y^2\right) + 10000$. Hallar el nivel de producción que reporta un beneficio máximo.

31) Un fabricante produce dos bienes, $x_1$ y $x_2$. Las cantidades demandadas son $D_1= 100-3p_1+p_2$ y $D_2=200+p_1-p_2$. La función de costo total es $C= 20D_1+10D_2$. Determinar el nivel de precios que permite obtener el máximo beneficio.

32) El costo laboral de una empresa está dado por la función: $C(x,y) = x^2 + y^3 - 6\,x\,y + 3\,x + 6\,y - 5$, donde x es el nro. de días de trabajo requeridos por parte de un trabajador experto, y es el nro. de días requeridos por un trabajador con capacitación mínima. Calcule los valores de x e y para los cuales el costo laboral será mínimo.

33) Un almacén de una pequeña zona rural vende 2 marcas de jugo de naranja; una marca local que obtiene a un costo de 30 pesos por lata y una marca nacional que obtiene a un costo de 40 pesos por lata. El dueño calcula que si la marca local se vende a "***x***" pesos por lata y la marca nacional a "***y*** " pesos por lata, se venderán cada día aproximadamente $(70 - 5x + 4y)$ latas de la marca local y $(80 + 6x - 7y)$ latas de la marca nacional. ¿Qué precio deberá fijar el dueño a cada marca para maximizar las utilidades obtenidas por la venta de jugos?

34) Un rectángulo tiene 20 cm de largo y 30 cm de ancho. Utilizar la diferencial total para estimar la cantidad de $cm^2$ que aumentará el área si la longitud se aumenta en 0,8 cm y el ancho en 0,6 cm.

35) En una cierta fábrica, la producción diaria es de $Q = 120K^{1/2}T^{1/3}$ unidades, donde $K$ es el capital invertido medido en unidades de 1000 dólares y $T$ es el tamaño de la fuerza de trabajo medido en horas-hombre. El capital actualmente invertido es de 400000 dólares y se usan cada día 1000 horas-hombre. Usar la diferencial total para estimar el cambio que resultará en la producción si la inversión de capital aumenta en 500 dólares y el trabajo aumenta en 4 horas-hombre.

36) Un editor estima que si se gastan $x$ miles de \$ en desarrollo e $y$ miles de \$ en promoción, se venderán aproximadamente $Q(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares de un nuevo libro. Los planes actuales necesitan el gasto de 36000\$ en desarrollo y 25000\$ en promoción. Usar la dif. total para estimar el cambio de ventas que resultará si la cantidad gastada en desarrollo se aumenta en 500\$ y la cantidad gastada en promoción se disminuye en 500\$.

37) Sea $\boxed{P = f(t,k) = 6t^2 - 4t^3 + 3k^2 - 3k^3}$ una función de producción donde $t$ y $k$ son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y $P$ es la cantidad producida.

a) Hallar las derivadas parciales primeras y segundas de la función producción.
b) Hallar sus puntos críticos.
c) Analizar si estos puntos críticos son máximos, mínimos o puntos silla (también llamados "puntos de ensilladura"). Justificar.
d) Encontrar los valores de $t$ y $k$ que maximizan $P$.
e) Calcular cuál es ese valor máximo de la producción.

**Respuestas**

2) $4 \in R$ ; $[-1;8) \subset R$ ; $(-2;-2;-2) \in R^3$ ; el punto $(-5;1) \in R^2$; $N \subset R$ ; $[0;1) \cup (1;2] \subset R$ ; $(0\,;100\,;200) \in R^3$ ; $(-\infty\,;9) \subset R$ ;

3) $\{el\ conjunto\ de\ los\ puntos\ que\ están\ sobre\ la\ recta\ y = 2x+3\} \subset R^2$ ;

$\{el\ conjunto\ de\ los\ puntos\ \mathrm{int}eriores\ al\ círculo\ de\ centro\ en\ el\ origen\ y\ radio\ 4\} \subset R^2$ ;

$\{el\ conjunto\ de\ los\ puntos\ que\ están\ sobre\ la\ esfera\ de\ centro\ en\ el\ origen\ y\ radio\ 4\} \subset R^3$

4) a) vardep: valor del alquiler – var. Indep: estreno
b) var. dep.: gasto – var. indep.: distancia y velocidad de automóvil.
c) vardep: precio del boleto. Var indep: horario, clase, forma de pago y edad
d) var. dep.: costo total – var. indep.: cantidades $q_1$ y $q_2$ de los artículos A y B.
e) var. dep.:demanda de carne de pollo. Var indep: precio del kg de pollo y precio kg carne vacuna
f) var. dep.: probabilidad – var. indep.: cantidad de números.

5) a) El dominio es el conjunto de los puntos que se encuentran sobre y dentro de la circunferencia con centro en el origen y radio 5.
c) El dominio es todo $R^2$ excepto el origen de coordenadas, es decir, el punto (0 ; 0).

6) a) $f(0,0) = 5$, $f(0,5) = 0$, $f(-1,3) = \sqrt{15}$, $f(1,1) = \sqrt{23}$

c) $f(0,0)$ no está definida, $f(0,5) = \dfrac{1}{25}$, $f(-1,3) = \dfrac{1}{10}$, $f(1,1) = \dfrac{1}{2}$

e) $f(0,0) = \sqrt{2}$, $f(0,5) = \sqrt{7}$, $f(-1,3) = \sqrt{8}$, $f(1,1) = 0$

7) a) $Dom = R^3$ ; b) $f(0,0,0) = 0$, $f(0,5,1) = -20$, $f(-1,3,-4) = 47$, $f\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right) = -1$

9) $\dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{x}{25} + \dfrac{y}{27} + \dfrac{z}{32} = 1$

11) b) Isocuantas. Las isocuantas indican las distintas combinaciones de factores de producción (o insumos) para los cuales obtengo el mismo nivel de producción (z=1; z=2 o z=3).

12) a) z=6 y=1/x
z=18 y=3/x
z=30 y=5/x
b) 25 horas hombre. c) 5 máquinas.

13) a) U(16;30)=1920

14) a) y=-2/3.x+1/3 ; y=-2/3.x+2/3 ; y=-2/3.x+1
b) y=18/3=6

15) a) $10=x^2+y \Rightarrow y= 10-x^2$ ; $15=x^2+y \Rightarrow y= 15-x^2$ ; $20=x^2+y \Rightarrow y= 20-x^2$
b) y=100-64=36

16) x=unid fabricadas modelo A; y= unid. fabricadas modelo B
a)C(x;y)=(16000+4000).x + (22000+8000) .y ; I(x;y) = 30000.x + 45000.y
B(x;y) = 10000.x + 15000.y – 2000

b) isocosto: k=20000.x+30000.y+2000 ;isoingreso: k=30000.x+45000.y;
indiferencia: k=10000.x+15000.y-2000

17) $K=(1600-L^2)^{1/2}$

18) Si δP/δC> 0 significa que a mayor calidad de los materiales aumenta el precio de la vivienda. Es razonable. Si δP/δS< 0 significa que al aumentar la superficie del piso el precio disminuye. No es razonable.

19) i) a) $f_x(x;y) = 5x^4y^2 - 6xy + 7$ c) 34 y 7

$f_y(x;y) = 2x^5y - 3x^2$ c) 3 y -3

$f_{xx}(x;y) = 20x^3y^2 - 6y$ c) 162 y 0

$f_{yy}(x;y) = 2x^5$ c) 2 y 2

$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = 10x^4y - 6x$ c) 24 y 6

ii) a) $f_x(x;y) = 2 - \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$ c) 1,8 y 4

$f_y(x;y) = -\dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ c) -0,2 y 2

$f_{xx}(x;y) = \dfrac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ c) -0,16 y 2

$f_{yy}(x;y) = \dfrac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ c) 0,17 y -2

$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = \dfrac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$ c) 0,12 y 0

20) a) $C_x(x;y) = 7$ Significa que al aumentar la producción del artículo x de 20 a 21unidades, mientras se mantenga constante en 30 unidades la producción del artículo y, aumentan los costos en \$7. $C_y(x;y) = 20$

b) $C_x(x;y) = 12$ $C_y(x;y) = 2$

21) a) $P_L(L,K) = 60$ $P_K(L,K) = 41$

b) $P_L(L,K) = 88{,}39$ $P_K(L,K) = 1060{,}66$

22) $\dfrac{\partial x_a}{\partial p_a} = -3$ $\dfrac{\partial x_a}{\partial p_b} = 1>0$ $\dfrac{\partial x_b}{\partial p_a} = 2>0$ $\dfrac{\partial x_b}{\partial p_b} = -5$ productos COMPETITIVOS

23) ε (x;6)= 6/85.(-60) = -4,235 ε (x;50)=50/85.0,3 = 0,176

24) ε (x;5)= -1 ε (x;4)= -0,5

25) a)$X_{Apa}$= -6.$p_a$ ; $X_{A\,pb}$ = 6 ; $X_{B\,pa}$ = 3 ;$X_{B\,pb}$= -8
b) productos COMPETITIVOS
c)ε($X_A$;$P_B$)= 0,203 ; ε($X_B$; $P_A$)= 0,0267

26) a) $Q_{K(K=5;L=2)}$ = 40 ; $Q_{L(K=5;L=2)}$ = 7
b) $ε_{(Q;\,L)(K=5;L=2)}$=5/243 . 40 = 0,823
c) aumenta 0,823%

27) a)$C_{(8;10)}$ = 1364 b)$C_{x(8;10)}$ = 66 ; $C_{y(8;10)}$ = 80

28) U(x,y)=24x+23y-250-0,2$x^2$-0,1$y^2$

29) a) mínimo en (0;3)
b) En (0;0) el hessiano es 0 => método no es concluyente.
c) Dos puntos críticos: punto silla en (0;0;1) y máximo en (4/3;4/3)
d) mínimo en (0;0)

e) máximo en (8;16)
f) máximo en (-1;0) y mínimo en (1;0)

30) Máximo en (2000;4000)

31) $p_1$ =85; $p_2$= 180

32) x= 27/2; y=5

33) $53 la marca local y $55 la marca nacional.

34) 36

35) 47

36) dQ=4500. 0,5 + 4320. (-0,5) = 90; la producción aumenta en 90 unidades

37) a) $P_t=12.t-12.t^2$ ; $P_{tt}= 12-24.t$; $P_k=6.k-9.k^2$; $P_{kk}=6-18.k$; $P_{tk}=P_{kt}=0$
b)c)d) mínimo en (0 ; 0), punto silla en (0 ; 2/3) ; punto silla en (1; 0) y máximo en (1 ;2/3).
e) 2,44