APUNTE: Sistemas de Ecuaciones Lineales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 2
Carreras: Lic. en Administración
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 2do
Año: 2016

Indice

APUNTE: Sistemas de Ecuaciones Lineales

<u>Definición</u>

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \Lambda\ , x_n$ es todo conjunto de relaciones del tipo:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \Lambda\ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \Lambda\ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \Lambda\ + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde los coeficientes a_{ij} y los términos independientes b_i son escalares dados.

<u>Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)</u>

Se dice que el conjunto de escalares $k_1, k_2, \Lambda\ , k_n$ constituyen una <u>solución</u> del sistema S si al tomar

$$x_1 = k_1 \ ; \ x_2 = k_2 \ ; \ \ldots . \ ; \ x_n = k_n$$

las m ecuaciones se convierten en igualdades.

<u>Resolver un sistema</u> S es hallar todas sus soluciones, es decir, hallar el valor de todas las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones simultáneamente.

<u>Clasificación de los SEL</u>

Un SEL se dice <u>COMPATIBLE</u> si tiene alguna solución e <u>INCOMPATIBLE</u> si no tiene ninguna solución.

A su vez, un sistema compatible se dice <u>DETERMINADO</u> si tiene una única solución e <u>INDETERMINADO</u> si tiene más de una.

<u>Ejemplos:</u>

1) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ➔

Este es un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas (x, y, z). Tiene una única solución que es $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$. Por lo tanto se trata de un sistema <u>compatible determinado</u>.

2) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ 4x + 6y - 2z = 8 \\ -10x - 15y + 5z = 20 \end{cases}$ ➔

Este es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (x, y, z). Tiene infinitas soluciones de la forma $(x, y, 2x + 3y - 4)$. Por lo tanto se trata de un sistema <u>compatible indeterminado</u>.

3) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$ ➔

Este es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (x, y). No tiene ninguna solución. Por lo tanto se trata de un sistema <u>incompatible.</u>

<u>Expresión matricial de un sistema</u>

Sea el SEL siguiente, de m ecuaciones y n incógnitas:

$$\text{S:} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definimos:

- <u>Matriz de los coeficientes</u>: es la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- <u>Matriz de los términos independientes</u>: es la matriz o vector columna $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots\ldots \\ b_m \end{bmatrix}$

- <u>Matriz de las incógnitas</u>: es la matriz o vector columna $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{bmatrix}$

Entonces, el sistema S puede expresarse de manera matricial de la siguiente forma:

$$\boxed{AX = B}$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots\ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo:</u> la expresión matricial del SEL del ejemplo anterior es:

1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y-z=0 \\ x+z=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ ➔ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 1: escribir las expresiones matriciales de los SEL de los ejemplos 2 y 3 anteriores.

2) $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 4x+6y-2z=8 \\ -10x-15y+5z=20 \end{cases}$ ➔

3) $\begin{cases} 8x-y=7 \\ 8x-y=10 \end{cases}$ ➔

Observación: notemos que si, dado un SEL en su expresión matricial, efectuamos el producto $A \cdot X = B$ entre matrices, obtendremos el sistema dado.

Sistemas Homogéneos

Un SEL es homogéneo si es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \Lambda + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \Lambda + a_{2n}x_n = 0 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \Lambda + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

o bien (en forma matricial) $A \cdot X = O$, donde O es la matriz nula de tamaño mx1.

Es decir, que en un sistema homogéneo todos los términos independientes son ceros.

Veamos que:

- Todo SEL homogéneo tiene por lo menos una solución $x_1 = x_2 = \Lambda = x_n = 0$ que se llama solución trivial. Por lo tanto, siempre es compatible.
- Si tiene alguna otra solución distinta de la trivial, será compatible indeterminado.

Sistemas Equivalentes

Si a las ecuaciones que componen un SEL se les aplican una o más de las siguientes operaciones (llamadas operaciones o transformaciones elementales):

- Intercambiar el orden en el que figuran las ecuaciones.
- Multiplicar una de las ecuaciones por cualquier escalar no nulo.
- Sumarle a una de las ecuaciones otra cualquiera de ellas.
- Aplicar cualquier combinación de las operaciones anteriores.

el sistema que se obtiene es equivalente al dado inicialmente. Es decir, es un sistema con las mismas soluciones que el dado.

Ejemplo: dado el SEL $\begin{cases} 2x-7y=3 \\ 8x+2y=5 \end{cases}$ los sistemas : $\begin{cases} 10x-35y=15 \\ 8x+2y=5 \end{cases}$, $\begin{cases} 10x-5y=8 \\ 8x+2y=5 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x-7y=3 \\ 50y=-7 \end{cases}$

son equivalentes al primero pues:

$\begin{cases} 10x-35y=15 \\ 8x+2y=5 \end{cases}$ se obtuvo multiplicando la primera ecuación por 5.

$\begin{cases} 10x-5y=8 \\ 8x+2y=5 \end{cases}$ se obtuvo sumando la segunda ecuación a la primera.

$\begin{cases} 2x-7y=3 \\ 50y=-7 \end{cases}$ se obtuvo multiplicando la primera ecuación por (–4) y sumándola a la segunda ecuación.

****

A continuación analizaremos algunos casos particulares de SEL. De cada uno de ellos veremos ejemplos y su interpretación geométrica.

(A) Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (2x2)

Estos sistemas son los más sencillos. Constan de un par de ecuaciones lineales para las cuales debemos hallar una solución común a ambas.

Es decir: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$

Cada ecuación lineal representa una recta en el plano. Por lo tanto se pueden presentar tres casos:

- Que las rectas se corten en un punto.
- Que las rectas no se corten nunca, es decir, sean paralelas.
- Que las rectas sean coincidentes.

En el primer caso, tendremos una única solución, que será el punto del plano $(x; y)$ donde ambas rectas se intersecan. Por lo tanto, el sistema será compatible determinado.

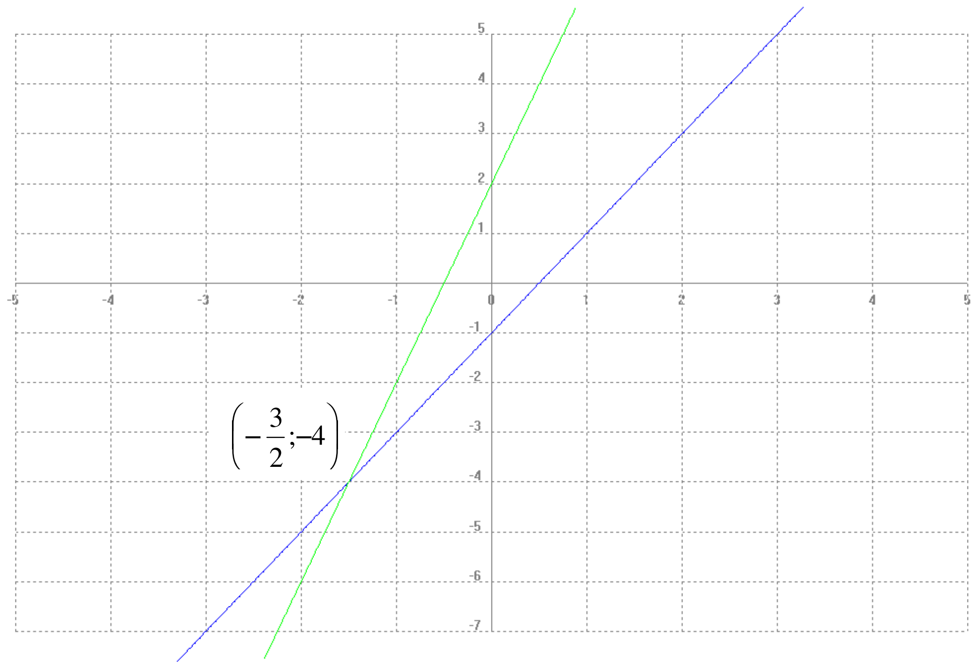
En el segundo caso, no tendremos ninguna solución. Entonces, el sistema será incompatible.

En el último caso, habrá infinitas soluciones, ya que cualquier punto que pertenezca a las rectas será solución del sistema. Luego, el sistema será compatible indeterminado.

Ejemplos:

1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 12x - 3y = -6 \end{cases}$ ➔ Este sistema tiene como solución el punto $\left(-\frac{3}{2};-4\right)$. Es compatible determinado.

Si graficamos ambas rectas en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales, obtendremos:



Un método de resolución de este sistema consiste entonces en graficar ambas rectas. El punto en el que se corten será la solución del sistema.

Para verificar que esta solución es correcta, reemplazamos los valores de las incógnitas $x = -\frac{3}{2}$, $y = -4$ en ambas ecuaciones del sistema, debiéndose cumplir las igualdades:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 12x - 3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - (-4) = -3 + 4 = 1 \\ 12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 \cdot (-4) = -18 + 12 = -6 \end{cases}$$

Además de este método gráfico, existen otros métodos de resolución, a saber:

- Método de igualación
- Método de sustitución

En el método de igualación, despejamos una misma variable de ambas ecuaciones. Por ejemplo, la y:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \Rightarrow y = 2x - 1 \\ 12x - 3y = -6 & \Rightarrow y = \dfrac{-6 - 12x}{-3} = 2 + 4x \end{cases}$$

Luego igualamos ambas expresiones: $2x - 1 = 2 + 4x$ y hallamos el valor de x: $\boxed{x = -\dfrac{3}{2}}$.

Conociendo el valor de x podemos hallar el valor de y reemplazando en cualquiera de las ecuaciones de arriba:

$y = 2x - 1 = 2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) - 1 = -4$. Luego, $\boxed{y = -4}$

Por lo tanto, la solución del sistema es $(x; y) = \left(-\dfrac{3}{2}; -4\right)$

Para resolver el sistema por el método de sustitución debemos despejar una de las variables de una de las ecuaciones, y reemplazarla en la otra ecuación.

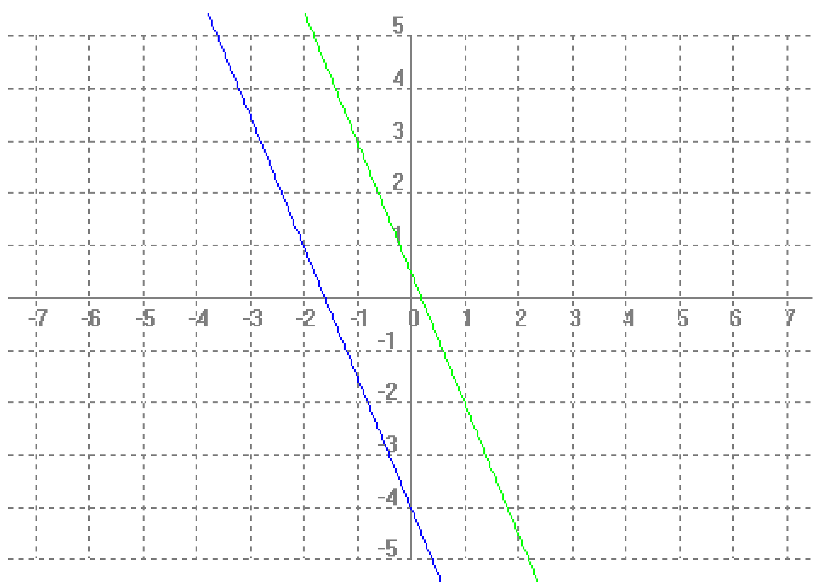
Por ejemplo, si despejamos x en la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda ecuación obtendremos:

$$2x - y = 1 \quad \Rightarrow x = \frac{1 + y}{2} \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot \left(\frac{1 + y}{2}\right) - 3y = -6 \quad \Rightarrow 6 + 6y - 3y = -6$$

$$\Rightarrow \quad 6 + 3y = -6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -4}$$

Por lo tanto $x = \dfrac{1 + y}{2} = \dfrac{1 - 4}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -\dfrac{3}{2}}$

2) $\begin{cases} 5x + 2y = -8 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ ➔ Este es un sistema incompatible. El gráfico nos muestra que ambas rectas son paralelas:

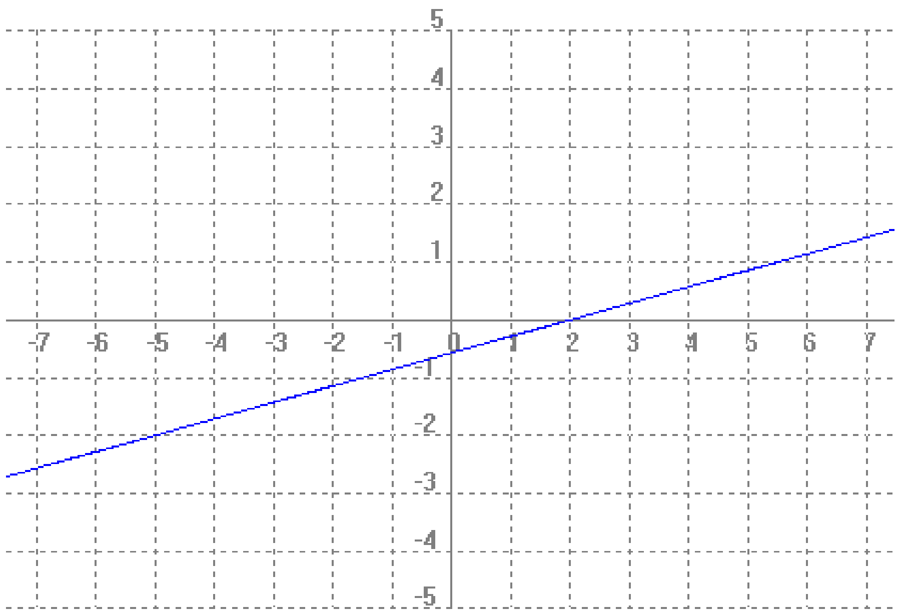


Ejercicio 2: resolver el sistema anterior por los métodos de igualación y de sustitución. Observar qué sucede en este caso. Sacar conclusiones.

Igualación:

Sustitución:

3) $\begin{cases} 4x - 14y = 8 \\ -6x + 21y = -12 \end{cases}$ ➔ Este es un sistema compatible indeterminado, ya que las rectas son coincidentes.



Ejercicio 3: probar que el sistema anterior es compatible indeterminado por los métodos de igualación y de sustitución. Observar qué sucede en este caso. Sacar conclusiones.

Ejercicio 4: en los siguientes problemas, plantear el sistema de ecuaciones y luego resolverlo por cualquiera de los métodos vistos:

a) En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50; si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase? (Rta: hay 17 conejos y 33 gallinas)

b) Se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de 2 litros y de 5 litros. ¿Cuántas botellas de cada una se han utilizado? (Rta: 20 botellas de 5 litros y 100 de 2 litros)

c) Un barco para turismo tiene camarotes dobles y simples. El folleto dice que ofrecen 105 camas distribuidas en 65 camarotes. ¿Cuántos camarotes de cada tipo tiene? (Rta: 25 simples y 40 dobles)

d) Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el doble. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano? (Rta: mi padre tiene 35 años y mi hermano tiene 15 años)

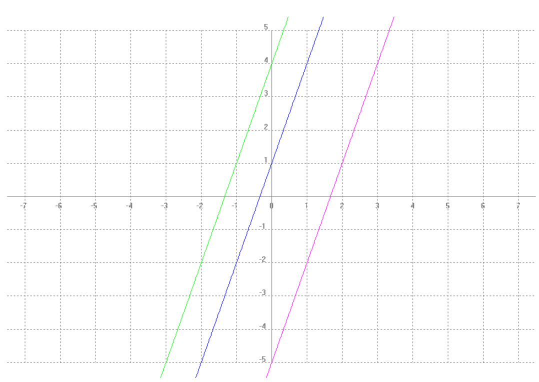
e) Una agencia de turismo ofrece dos tipos de excursiones en sus dos locales de venta. El primer local vendió 20 excursiones del primer tipo y 30 del segundo tipo, por lo que recaudó 10210$, mientras que el otro local vendió 10 del primer tipo y 12 del segundo tipo, recaudando un monto de 4340$. ¿Cuál es el precio de venta de cada excursión? (Rta: 128$ y 255$)

(B) Sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas (3x2)

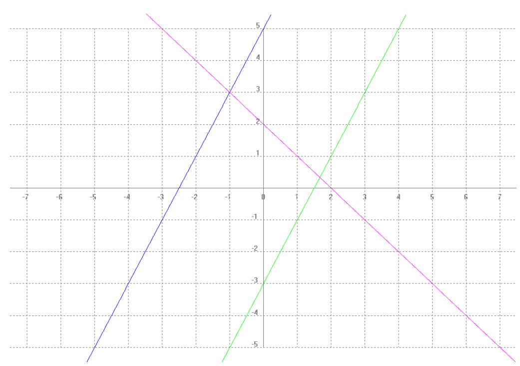
Si a los sistemas de ecuaciones anteriores les agregamos una tercera ecuación, obtendremos un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$$

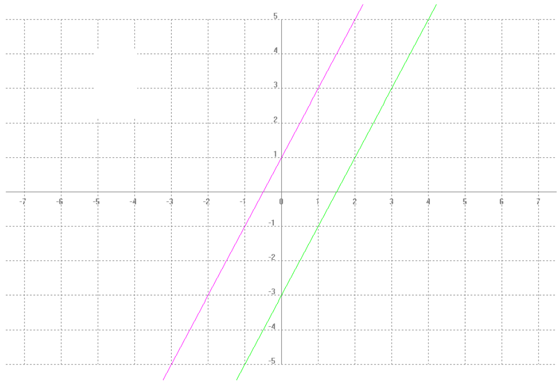
Geométricamente significa que tenemos tres rectas en el plano. Pueden darse varias situaciones según la posición de estas rectas:



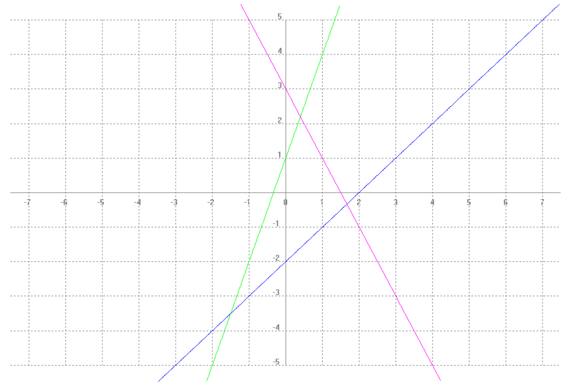
Tres rectas paralelas



Dos rectas paralelas y la otra corta a ambas



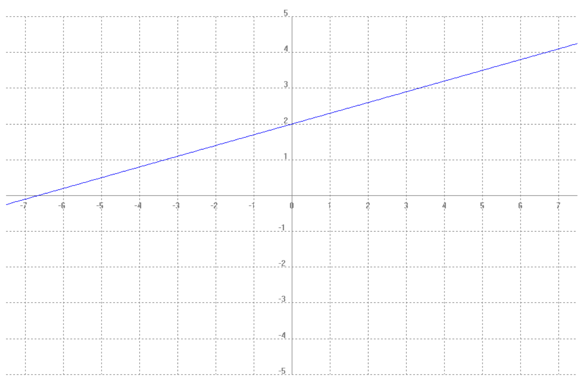
Dos rectas coincidentes y la otra paralela a estas



Tres rectas que se cortan de a dos

En todos estos casos el sistema es <u>incompatible</u>, ya que no podemos encontrar un par de valores $(x; y)$ que satisfagan a las tres ecuaciones simultáneamente.

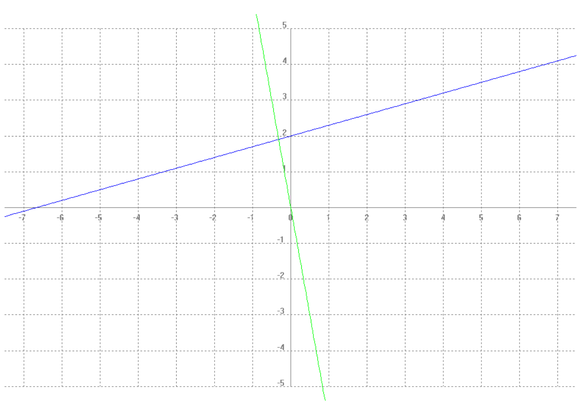
El siguiente caso:



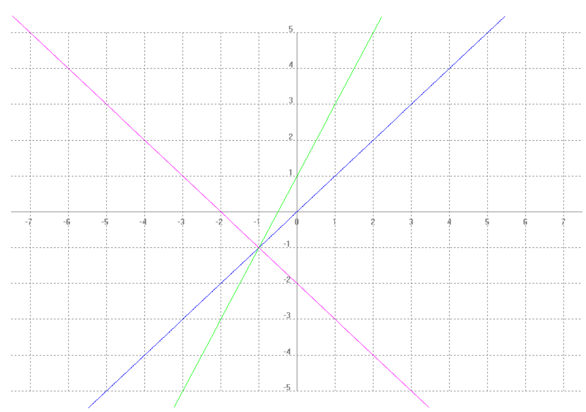
Tres rectas coincidentes

nos muestra un sistema <u>compatible indeterminado</u> ya que, al coincidir las tres rectas, cualquier par de valores $(x; y)$ será solución del sistema.

Por último, los siguientes casos:



Dos rectas coincidentes y la otra corta a ambas



Tres rectas que se cortan en un punto

Son ejemplos de sistemas <u>compatibles determinados</u>, ya que existe un solo par de valores $(x; y)$ que satisface las tres ecuaciones simultáneamente.

Para resolver estos sistemas, además del método gráfico, podemos tomar dos de las ecuaciones dadas, hallar los valores de las incógnitas mediante uno de los métodos vistos anteriormente, y luego verificar esta solución con la tercera ecuación.

Sin embargo, se recomienda resolver estos sistemas mediante otro método, el cual es más eficiente, y que podremos utilizar para sistemas de cualquier número de ecuaciones y de incógnitas. Es el Método de Gauss.

Resolución de sistemas de tres ecuaciones y dos incógnitas mediante el Método de Gauss

Primero definiremos:

- Matriz del sistema o Matriz ampliada asociada: es la matriz $A|B = \left\langle \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots\dots & & & & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\rangle$

Entonces, el sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$ podemos escribirlo como $A|B = \left\langle \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{array} \right\rangle$

Mediante operaciones elementales entre las filas de la matriz obtendremos sistemas equivalentes (ver pág.4) más simples que nos permitirán obtener las soluciones buscadas. La idea es transformar la matriz ampliada $A|B$ en

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{array} \right\rangle$$

donde α_{22}, β_2 y β_3 son los nuevos escalares que surgen luego de realizar las mencionadas operaciones elementales.

Veamos con un ejemplo cómo se aplica este método.

Sea el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ -3x + 2y = 4 \\ x + 3y = 17 \end{cases}$$

cuya matriz ampliada asociada es

$$A|B = \left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 9 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 17 \end{array} \right\rangle$$

Aplicando sucesivas operaciones elementales obtenemos:

$$\left\langle\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 9 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 17 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\langle\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 7/2 & 35/2 \\ 1 & 3 & 17 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\langle\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 7/2 & 35/2 \\ 0 & 5/2 & 25/2 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\langle\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right\rangle$$

Multiplico la primer fila por (3/2) y la sumo a la segunda fila.

Multiplico la primer fila por (-1/2) y la sumo a la tercer fila.

Multiplico la segunda fila por (2/7) y multiplico la tercer fila por (2/5)

Vemos que la segunda y tercer filas son iguales. Es decir, que si restamos la segunda fila a la tercera, ésta quedará formada solamente por ceros. Lo que significa que podemos prescindir de esta ecuación.

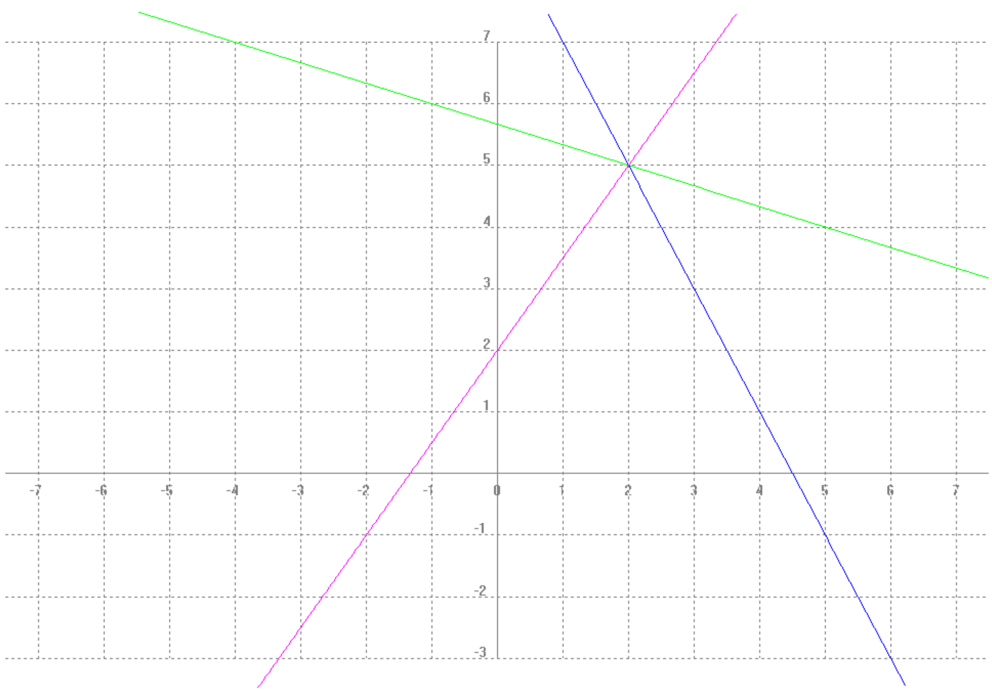
$$\left\langle\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle$$

Por lo tanto, volviendo a escribir el sistema equivalente obtenido, en forma de ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$$

Luego, la solución del sistema es $\boxed{x = 2\ ;\ y = 5}$.

Gráficamente, se observa que este es el punto de intersección de las tres rectas:



Ejercicio 5: resolver los siguientes sistemas mediante el método de Gauss, e indicar qué tipo de sistemas son:

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + 5y = 11 \\ -x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 8y = 6 \\ 2x - 4y = 3 \\ -10x + 20y = -15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -\frac{3}{2}x + 3y = -9 \\ x - 2y = -10 \\ -\frac{x - 2y}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - y = 2 \\ 3x - y = 7 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

Respuestas: a) x=3 ; y=1 b) compatible indeterminado c) incompatible d) incompatible

Ejercicio 6: Un padre desea repartir 10000$ entre sus dos hijos, de manera que el doble de la cantidad que reciba el primero sumada a lo que reciba el segundo dé 5000$, y que el doble de lo que reciba el segundo sumado a lo que reciba el primero dé 3000$. ¿Podrá el padre realizar esto?

(C) Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (3x3)

Son sistemas del tipo: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es $A|B = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right\rangle$.

Estos sistemas también los resolveremos utilizando el método de Gauss. Entonces, mediante operaciones elementales, la matriz ampliada anterior quedará transformada en

$$A|B = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \beta_3 \end{array} \right\rangle$$

Veamos un ejemplo:

Sea el sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right\rangle$.

Entonces:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -7/4 & 7/4 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\rangle$$

Por lo tanto un sistema equivalente al dado es: $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ -4y + 5z = -5 \\ z = -1 \end{cases}$

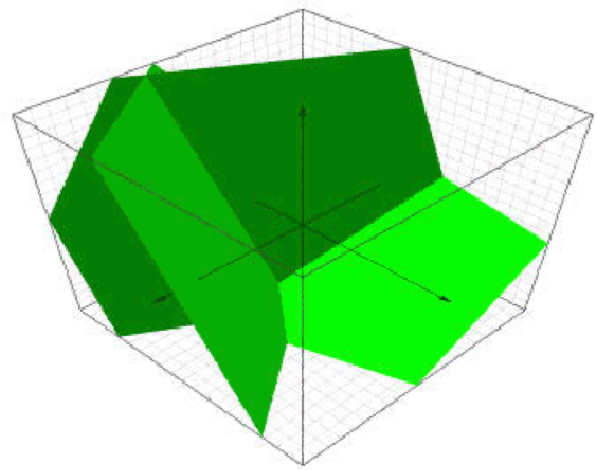
Como $\boxed{z=-1}$ entonces $-4y+5\cdot(-1)=-5$ ➔ $-4y=-5+5=0$ ➔ $\boxed{y=0}$

Por último: $x+3\cdot 0-2\cdot(-1)=4$ ➔ $x+2=4$ ➔ $\boxed{x=2}$

Luego, el sistema es compatible indeterminado ya que tiene una única solución que es la terna $(2;0;-1)$.

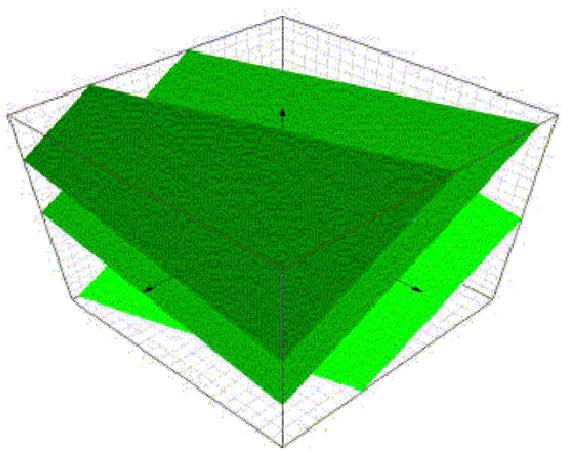
Interpretación geométrica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

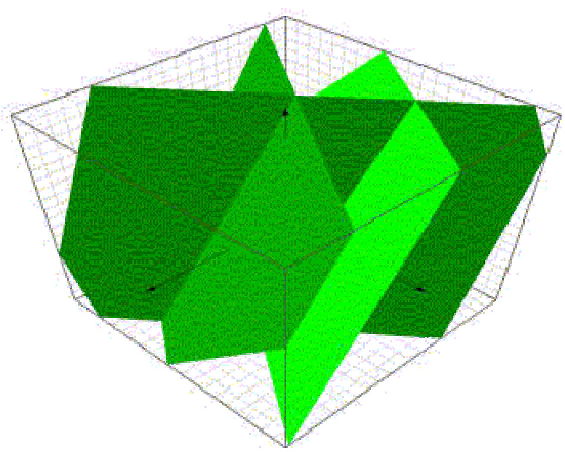
Cada ecuación de este sistema representa un plano en el espacio. Si el sistema es compatible determinado, la solución es el punto en el espacio $(x;y;z)$ común a los tres planos.



Para imaginarnos esta situación, pensemos en una habitación. El techo y dos paredes contiguas son los tres planos. La esquina donde estos intersecan es el punto común a los tres planos.

Por supuesto, no siempre habrá un único punto de intersección entre los tres planos. Puede suceder que los tres planos sean paralelos entre sí. O bien, dos paralelos y el tercero corte a ambos. O que se corten de a dos…





Ejercicio 7: analiza todas las posibles posiciones que pueden tener tres planos entre sí, y en cada caso piensa si se trata de un sistema compatible (determinado o indeterminado) o incompatible.

Ejercicio 8: resuelve los siguientes sistemas de 3x3

a) $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ x-2y+z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y+4z=1 \\ -2x+2y-2z=-5 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 8x-2y+2z=6 \end{cases}$

Rta: a) comp. det. $x=\frac{4}{3};y=1;z=-\frac{1}{3}$; b) incompatible ; c) comp indet.. $y=5-5x$; $z=8-9x$

Ejercicio 9: resuelve los siguientes problemas, planteando previamente en cada caso el sistema de ecuaciones correspondiente.

a) Una compañía aeronáutica dispone de 10 aviones destinados a vuelos charter para directivos de grandes empresas y equipos deportivos. Dispone de tres tipos de aviones: el modelo A es un reactor con capacidad para 30 pasajeros y cuya tripulación está formada por 3 pilotos; el modelo B es un turbohélice bimotor con capacidad para 20 pasajeros y su tripulación la forman 2 pilotos; el modelo C es una pequeña avioneta-taxi con capacidad para 4 pasajeros y un piloto. Ayer, por la mañana, despegaron todos los aviones completos. En ellos iban 140 pasajeros y 17 pilotos. ¿Cuántos aviones de cada modelo tiene la compañía? (RTa: 2 del tipo A, 3 del tipo B y 5 del tipo C)

b) La suma de las edades de tres hermanos es de 32 años. La edad del mayor es igual a la suma de las edades de sus hermanos menores. Dentro de 8 años, el mayor doblará la edad del menor. Calcula la edad actual de cada uno de los hermanos. (Rta: 16, 12 y 4 años)

c) Halla un número de tres cifras sabiendo que éstas suman 18. Además, la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos y, por último, si a este número le restamos el que resulta de invertir el orden de sus cifras, el resultado es 99. (Rta: el número es 594)

d) Los sueldos del padre, la madre y el hijo sumados dan 32500$. La madre gana el doble del hijo. El padre gana 2/3 de lo que gana la madre. ¿Cuánto gana cada uno? (Rta: el padre 10000$, la madre 15000$ y el hijo 7500$)

Uso de la matriz inversa para la resolución de sistemas

Hemos visto que un SEL puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = B$$

Resolver un sistema significa hallar el valor de las incógnitas o variables, es decir, hallar el vector columna X .

Vamos a "despejar" X de la ecuación anterior, de la siguiente manera:

- Primero multiplicamos a izquierda por la inversa de A: $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$
- Ahora asociamos: $\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B$
- Como $A^{-1} \cdot A = I$ entonces $I \cdot X = A^{-1} \cdot X$
- Como la matriz identidad I es el elemento neutro para el producto de matrices (como el número 1 lo es para el producto de números reales), nos queda que: $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

Esto será válido siempre y cuando A sea cuadrada e invertible.

Por lo tanto, concluimos que:

Para resolver el sistema $A \cdot X = B$ debemos efectuar el producto $X = A^{-1} \cdot B$ donde A^{-1} es la matriz inversa de A

Ejemplo: resolver el sistema $\begin{cases} x + 4y + 2z = 1 \\ 3x + 7y + 9z = 1 \\ x + 5y + z = 2 \end{cases}$

Primero escribimos el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$ es decir $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Luego hallamos la inversa de la matriz A por alguno de los métodos vistos (Gauss, usando determinantes) obteniendo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -19 & 3 & 11 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Entonces el vector columna X será:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -19 & 3 & 11 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución del sistema es $x = 6$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = -\frac{3}{2}$.

Ejercicio 10: resolver por este método (si es posible) los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -y + z = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$

Rta: a) $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{3}{2}$ b) $x = 3$; $y = 0$

Uso de los determinantes para la resolución de sistemas

Sistemas de Cramer

Un SEL se dice que es un sistema de Cramer si su matriz de coeficientes A es cuadrada y regular, es decir, si el sistema tiene igual cantidad de incógnitas que de ecuaciones, y el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de cero.

Por lo tanto:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{ es de Cramer } \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\ldots & a_{3n} \\ \ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ es tal que } m = n \text{ y } \det(A) \neq 0$$

Teorema de Cramer

Todo sistema de Cramer tiene una y sólo una solución $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$, la cual se obtiene de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \ ; \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \ ; \ \ldots\ldots ; \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

donde:

Δ es el determinante de la matriz de coeficientes A

y

Δ_i es el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz A la columna i por la columna de términos independientes .

Veamos cómo funciona este teorema con un ejemplo:

Sea el sistema $S:\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ -x + 5y + z = 4 \\ 3x - 2y - 4z = -1 \end{cases}$. La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

Calculamos el $\det(A)$ por alguno de los métodos vistos (regla de Sarrus, desarrollo por cofactores) obteniendo $\Delta = \det(A) = 2$.

Hallamos ahora Δ_1, Δ_2 y Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Luego, las soluciones son:

$$x = x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3 \;\; ; \;\; y = x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1 \;\; ; \;\; z = x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejercicio 11:

Determinar si los siguientes SEL son sistemas de Cramer. En caso afirmativo, hallar su solución mediante el Teorema de Cramer.

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + z = -1 \\ 5x + 3y = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y - z = 9 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

a) $x = \frac{3}{2}$; $y = -2$; $z = \frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{4}{11}$; $y = \frac{14}{11}$; $z = \frac{1}{11}$ c) Incompatible

Ejercicio 12:

Resuelve los siguientes problemas aplicando cualquiera de los métodos vistos, planteando previamente en cada caso el sistema de ecuaciones correspondiente:

a) Se ha fundido una cadena de oro del 80% de pureza junto con un anillo del 64% de pureza. Así se han obtenido 12 gramos de oro de una pureza del 76%. ¿Cuántos gramos pesaba la cadena y cuántos el anillo? (Rta: la cadena 9 gramos y el anillo 3 gramos)

b) Un fabricante produce tres artículos A, B y C. Por cada unidad vendida gana 1\$ por A, 2\$ por B y 3\$ por C. Los costos fijos son 17000\$ por año, y los costos de producción por cada unidad son 4\$, 5\$ y 7\$ respectivamente. En el año 2008 se fabricaron y vendieron un total de 11000 unidades entre los tres productos, obteniendo 25000\$ de ingresos. Si el costo total fue de 80000\$, ¿cuántas unidades de cada producto fabricaron en el año 2008? (Rta: 2000 unidades de A, 4000 unidades de B y 5000 de C).