PROGRESIONES GEOMETRICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economia
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 1ero
Año: 2016

Una **progresión geométrica** (P.G.) es una sucesión tal que cada término de obtiene multiplicando un número constante al anterior. Este número constante se llama **razón** de la P.G.

Ejemplos:

1) La sucesión 2, 6, 18, 54, 162, … es una P.G. de razón $r = 3$. Esta sucesión puede escribirse por comprensión así:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 3 \quad \forall n > 1 \end{cases}}$$

Vemos que el término general es $\boxed{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

2) La sucesión 4, -8, 16, -32, 64, -128, … es una P.G. de razón $r = -2$. Esta sucesión puede escribirse por comprensión así:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot (-2) \quad \forall n > 1 \end{cases}}$$

Vemos que el término general es $\boxed{a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}}$

Fórmula del término enésimo de una P.G.

Si $a(n) = \{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}, \cdots$ es una P.G. entonces $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Observación: *en algunos casos se consideran P.G. con un número **finito** de términos, o sea, podemos tomar una **parte** de la sucesión.*

Ejemplos:

1) En una P.G. de razón $\left(\frac{1}{2}\right)$ el primer término es 5. ¿Cuál es el sexto término?

Como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y $a_1 = 5$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$ tenemos que $a_6 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{32} = \boxed{\frac{5}{32}}$

2) En una P.G. de razón $\frac{4}{5}$ el sexto término es 3. ¿Cuál es el primer término?

Como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ entonces $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)^5} = \frac{3}{\frac{1024}{3125}} = \boxed{9{,}15}$

3) ¿Cuántos términos tiene una P.G. de razón 3 cuyos extremos son $\frac{1}{3}$ y 243?

Como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ entonces $\dfrac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$ ➔ $\ln\left(\dfrac{a_n}{a_1}\right) = \ln\left(r^{n-1}\right)$ ➔ $\ln(a_n) - \ln(a_1) = (n-1)\ln(r)$

➔ $\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a_1)}{\ln(r)} + 1 = n$ ➔ $n = \dfrac{\ln(243) - \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)}{\ln(3)} + 1 = 6 + 1 = \boxed{7}$

<u>Problemas de aplicación</u>

En la vida cotidiana existen numerosos ejemplos en los que se produce un **<u>crecimiento geométrico</u>**, también llamado **<u>crecimiento exponencial</u>**.

Por ejemplo, el "crecimiento" de un capital puesto a interés compuesto, el crecimiento de la población de una ciudad, el número de células de un feto mientras se desarrolla en el útero materno, el número de bacterias que se reproducen por mitosis, el número de contraseñas posibles con *n* dígitos.

También puede suceder que haya un "decrecimiento", es decir, que a partir de un valor inicial, los siguientes valores son cada vez más pequeños que éste. Por ejemplo, el decrecimiento de una población o el enfriamiento de un cuerpo.

Analizaremos dos ejemplos:

<u>(I) Interés Compuesto</u>

Se dice que un capital ha sido colocado a **<u>interés compuesto</u>**, si el interés simple producido por él, al final de cada período de capitalización, se suma a dicho capital para producir nuevos intereses.

Supongamos que disponemos de un capital y lo depositamos en un banco que nos otorga un tanto por ciento anual de intereses y podemos optar por la capitalización o no de los intereses. En el caso del Interés Compuesto significa entonces que optamos por la capitalización de los intereses.

Supongamos que nuestro capital inicial es C_0. Entonces:

- al cabo de un año tendremos un capital $C_1 = C_0 + C_0 I = \boxed{C_0(1+I)}$
- al cabo de dos años tendremos un capital $C_2 = C_1 + C_1 I =$
  $$= C_0(1+I) + C_0(1+I)I = C_0(1+I)(1+I) = \boxed{C_0(1+I)^2}$$
- al cabo de tres años tendremos un capital $C_3 = C_2 + C_2 I =$
  $$= C_0(1+I)^2 + C_0(1+I)^2 I = C_0(1+I)^2(1+I) = \boxed{C_0(1+I)^3}$$
- y así sucesivamente.

Al cabo de n años tendremos un capital $C_n = C_0(1+I)^n$ o lo que es lo mismo: $\boxed{C_n = C_0(1+I)(1+I)^{n-1}}$ que es una P.G. de razón $(1+I)$ cuyo primer término es $C_0(1+I)$

<u>Ejemplo:</u>

Supongamos que disponemos de 20.000$ y lo depositamos en un banco a una tasa del 8 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 5 años?

<u>Solución:</u>

En este caso el primer término es $C_0(1+I) = 20.000(1+0{,}08) = 21600$ y la razón $1+I = 1+0{,}08 = 1{,}08$.

Al cabo de 5 años tendremos: $C_5 = C_0(1+I)(1+I)^{5-1} = 21600 \cdot (1{,}08)^4 = \boxed{29386{,}56\$}$

(II) Crecimiento de una población

Ejemplo:

La población de una ciudad aumenta a razón del 10 % anual. Si en el año 2002 había 15000 habitantes, ¿cuál será la población en el año 2010?

Solución:

Para visualizar la situación, armemos la siguiente tabla:

término de la progresión	***año***	***población***
a_1	2002	15000
a_2	2003	$15000 \cdot 1{,}10 = 16500$
a_3	2004	$16500 \cdot 1{,}10 = 15000 \cdot (1{,}10)^2 = 18150$
a_4	2005	$18150 \cdot 1{,}10 = 15000 \cdot (1{,}10)^3 = 19965$
………	………	………
a_n	2010	$15000 \cdot (1{,}10)^{n-1} = a_1 \cdot (1{,}10)^{n-1}$

Por lo tanto, se trata de una progresión geométrica de razón $r = 1{,}10 = 10\%$ y primer término $a_1 = 15000$.
Se desea averiguar la población en el año 2010, es decir, $a_9 = 15000 \cdot (1{,}10)^{9-1} = \boxed{32154}$

Suma de los n primeros términos de una P.G.

La suma de los n primeros términos de una P.G. es igual a:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{(r-1)}$$

Demostración)

Como $a_2 = a_1 \cdot r$, $a_3 = a_1 \cdot r^2$, $a_4 = a_1 \cdot r^3$, … , $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Entonces $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$$= a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-3} + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1} \quad (*)$$

Multiplico por r miembro a miembro:

$$S_n \cdot r = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n \quad (**)$$

Realizo la resta entre (**) y (*) miembro a miembro:

$$S_n \cdot r - S_n = a_1 \cdot r^n - a_1$$

Saco factor común S_n y a_1:

$$S_n \cdot (r-1) = a_1 \cdot (r^n - 1) \ \Rightarrow \ \boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{(r-1)}}$$

Sobre la invención del ajedrez

Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".
El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente: "Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".
Al príncipe le pareció que el deseo del inventor era muy fácil de conceder, pero cuando calcularon la cantidad se dieron cuenta que toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía el inventor.
¿Cuántos granos de trigo pedía aproximadamente?

Ejercicios:

1) Escribir los 5 primeros términos de una P.G. tal que: a) $a_1 = -\frac{1}{4}$; $r = -4$ b) $a_1 = 12$; $r = \frac{1}{2}$

2) Calcular la razón si: a) $a_1 = \frac{3}{5}$; $a_2 = 6$ b) $a_4 = 2\sqrt{2}$; $a_5 = 4\sqrt{2}$

3) Calcular el término enésimo si: a) $a_1 = 25$; $r = -3$; $n = 6$ b) $a_1 = -\frac{1}{4}$; $r = -2$; $n = 11$

4) Calcular el primer término si: a) $a_n = \frac{1}{2}$; $r = 2$; $n = 21$ b) $a_n = \frac{1}{16}$; $r = -\frac{1}{4}$; $n = 7$

5) Calcular la razón si: a) $a_1 = 27$; $a_n = 8$; $n = 4$ b) $a_1 = 80$; $a_n = \frac{5}{2}$; $n = 11$

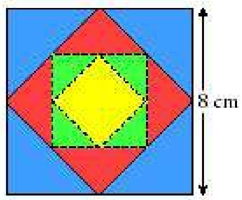
6) Calcular la cantidad de térm. si: a) $a_1 = 2$; $a_n = 512$; $r = 2$ b) $a_1 = 16$; $a_n = \frac{27}{4}$; $r = \frac{3}{4}$

7) Calcular S_n si: a) $a_1 = 2$; $r = -10$; $n = 6$ b) $a_1 = \frac{1}{5}$; $r = -1$; $n = \frac{3}{2}$

8) En una P.G. la suma de los primeros 11 términos es 4094 y la razón es 2. Hallar el primer término.(Rta: 2)

9) El primer y octavo términos de una P.G. son – 4608 y 36 respectivamente. Hallar la razón. (Rta: – ½)

10) Se tiene un cuadrado de 8 cm de lado. Se determina un segundo cuadrado que tiene por vértices los puntos medios del cuadrado primero. Luego se determina un tercer cuadrado que tiene por vértices los puntos medios del segundo cuadrado, y así se repite esta operación cuatro veces. Calcular la suma de las superficies de todos los cuadrados. (Rta: 24,25 cm^2). Escribir la sucesión formada por las longitudes de los lados de los cuadrados.



11) Si la suma de los tres primeros términos de una P.G. es 248 y la diferencia entre los extremos es 192, ¿cuáles son esos números? (Rta: 8, 40 y 240)

12) De un barril de vino que contiene 1024 litros, un día se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó al décimo día? (Rta: un litro)

13) La población de una provincia ha aumentado durante 5 años en progresión geométrica, pasando de 200000 a 322102 habitantes. ¿Cuál ha sido la razón de la progresión? Exprésala en %.

14) Una persona comunica un secreto a otras 3. Diez minutos después cada una de ellas lo ha comunicado a otras 3 y cada una de estas a otras 3 nuevas en los diez minutos siguientes, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocen el secreto después de dos horas?