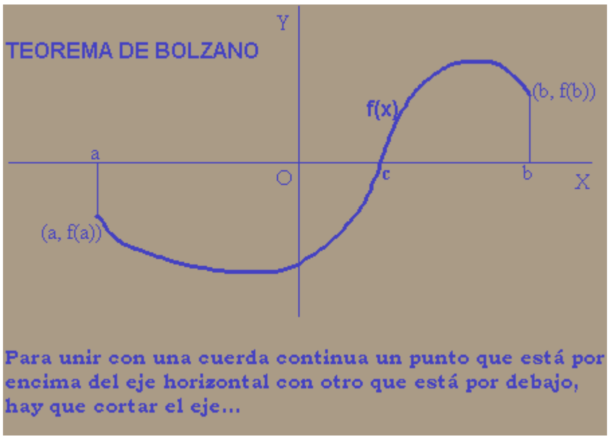
APUNTE: TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
<u>Asignatura</u>: Matemática 1
<u>Carrera</u>: Lic. en Economía
<u>Profesor</u>: Prof. Mabel Chrestia
<u>Semestre</u>: 1ero - <u>Año</u>: 2016

Enunciaremos los tres principales teoremas referidos a funciones continuas.

1) <u>TEOREMA DE BOLZANO</u>

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo abierto (a, b) tal que: $f(c)=0$



El teorema de Bolzano se usa, sobre todo, para hallar aproximaciones a las <u>raíces</u> de las ecuaciones, es decir, a los <u>ceros</u> de las funciones.

Para entender el significado de este teorema, supongamos que el eje X fuese una calle, y el segmento (a, b) un camino que hemos de seguir: si el punto "a" está en un lado de la calle (tiene valor negativo) y el punto "b" está en el otro lado de la calle (tiene valor positivo) y el camino es continuo, es decir, debemos recorrerlo paso a paso, sin "saltar", entonces es evidente que este camino ha de cortar por lo menos en un punto la calle (el eje X), con lo que podemos decir que *para cruzar de una vereda a otra hay que atravesar la calle.*

2) <u>TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO (o DE LOS VALORES INTERMEDIOS)</u>

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo cerrado $[a, b]$ tal que: $f(c)=k$

Significa que si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces la función toma **<u>todos</u>** los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. No puede saltearse ningún valor.

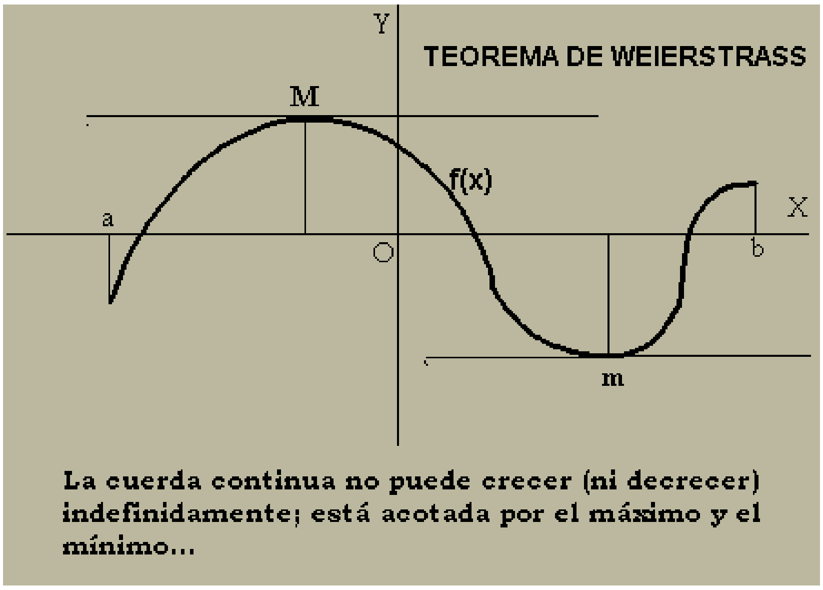
Siguiendo con el ejemplo de la calle, supongamos que queremos ir de nuestra casa (punto "a") a la casa de un amigo (punto "b") caminando. Entonces deberemos pasar por todos los puntos intermedios (puntos "c"), es decir, todas las casas, negocios, etc., que haya entre ambas viviendas.

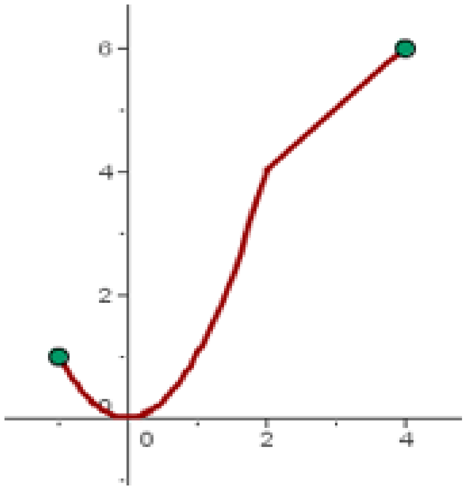
Otro ejemplo: si una persona mide 168 cm y hace 13 años medía 135 cm, seguramente que en algún momento intermedio medía por ejemplo 150 cm. Ahora bien: si una entrada al cine cuesta \$70 y el año pasado costaba \$50, ¿es seguro que en algún momento costó \$60? No es seguro, quizás si, y quizás no.

La diferencia entre ambas situaciones está en que la altura de una persona en función del tiempo ES UNA FUNCION CONTINUA. En cambio, el precio de una entrada al cine en función del tiempo NO ES UNA FUNCION CONTINUA. En este último caso puede darse que una entrada pase de valer \$50 a \$70 sin pasar por todos los valores intermedios. Pero esto no sucede con la altura de una persona.

3) **TEOREMA DE WEIERSTRASS**

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, Entonces existen dos valores m y M pertenecientes a $[a, b]$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo x en $[a, b]$. El punto $(m; f(m))$ es el MINIMO de la función y el punto $(M; f(M))$ es el MAXIMO de la función.





Puede suceder que el mínimo y el máximo se encuentren en los extremos del intervalo, o no.

Por ejemplo, en la función graficada a la derecha, vemos que el mínimo es el punto (0;0) y el máximo el punto (4 ; 6).

Es decir, el mínimo es un punto interior de intervalo dado, y el máximo es un punto en el extremo de intervalo.

Un problema resuelto

Demostrar que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje X (es decir, tiene una raíz real) en el intervalo [0;2].

Solución

Por ser una función polinómica, la función es continua en todos los reales. En particular, es continua en el intervalo [0;2].

Calculo las imágenes de los extremos del intervalo.

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 > 0.$$
$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 < 0.$$

Como se cumplen las hipótesis del **teorema de Bolzano**, podemos concluir que existe al menos un punto c que pertenece al intervalo (0; 2) que corta al eje de las abscisas (o sea, eje X). Es decir, la función tiene al menos una raíz en el intervalo (0;2).