# APUNTE: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES – CRECIMIENTO Y CONCAVIDAD

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO**
**Asignatura: Matemática 1**
**Carreras: Lic. en Economía**
**Profesor: Prof. Mabel Chrestia**
**Semestre: 1ero – Año: 2016**

- **Relación entre el crecimiento de una función y el signo de la derivada primera**

Analicemos algunas funciones conocidas:

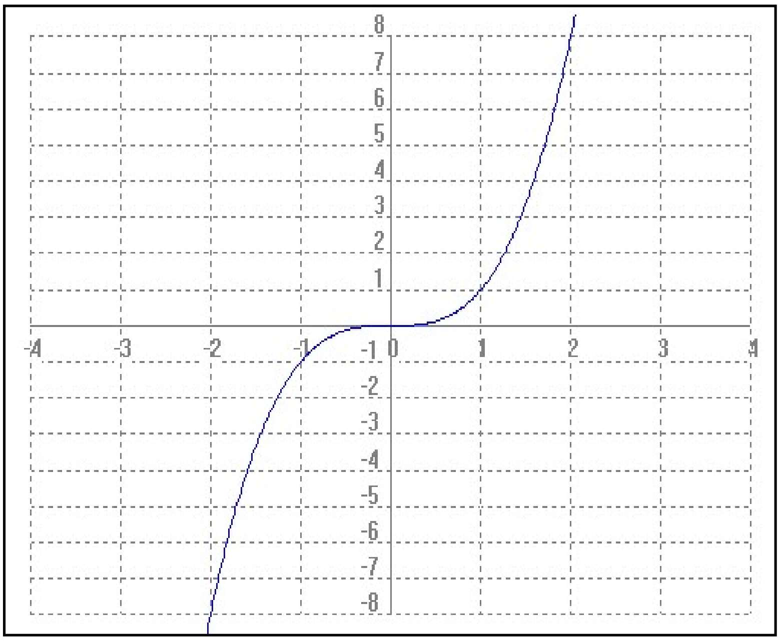
Ejemplo 1

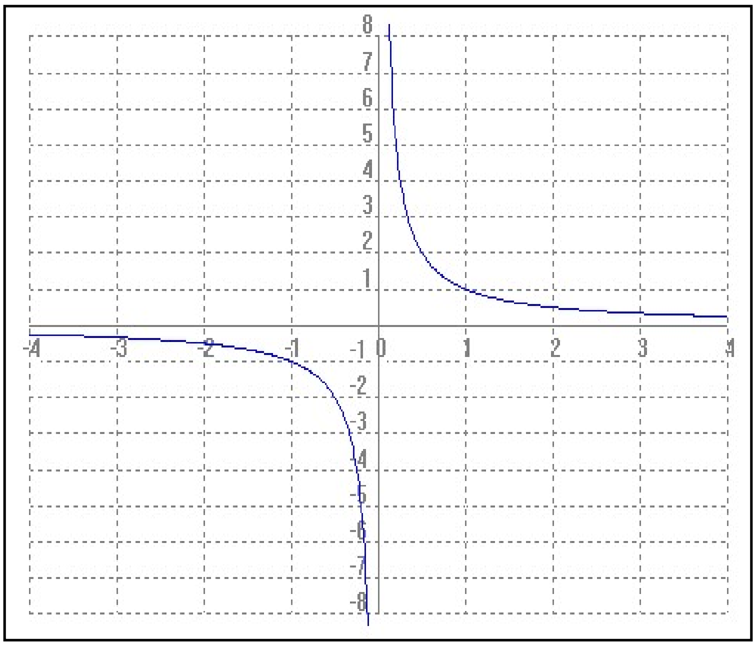
Sea la función $\boxed{f(x) = x^3}$, con dominio en $R$. Sabemos que esta función es siempre creciente.

Su derivada primera es $f'(x) = 3x^2$, cuyo dominio también es $R$. Como la variable independiente está elevada al cuadrado, cualquiera sea el valor que tome (positivo o negativo), la derivada será positiva.

Esto es: $f'(x) > 0$, $\forall x \in R, x \neq 0$.

En particular, en $x = 0$ la derivada es nula.




Ejemplo 2

Consideremos ahora la función $\boxed{g(x) = \frac{1}{x}}$.

Su derivada es $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Ambas funciones tienen como dominio a $R - \{0\}$.

$g(x)$ es decreciente en todo su dominio, y su derivada primera es negativa, es decir, $g'(x) < 0$, $\forall x \in R - \{0\}$.

Como vemos, el hecho de que una función sea creciente o decreciente está relacionado con que la derivada primera sea positiva o negativa.

Se cumple la siguiente propiedad:

Sea $f$ una función derivable en $x_0$.
- Si $f'(x_0) > 0$ entonces $f$ es estrictamente creciente en $x_0$.
- Si $f'(x_0) < 0$ entonces $f$ es estrictamente decreciente en $x_0$.

En la propiedad anterior no hemos analizado qué sucede si $f'(x_0) = 0$ o si no existe la derivada en ese punto. Para ello, antes debemos definir qué es un extremo y qué es un punto crítico.

- **Extremos absolutos y relativos**

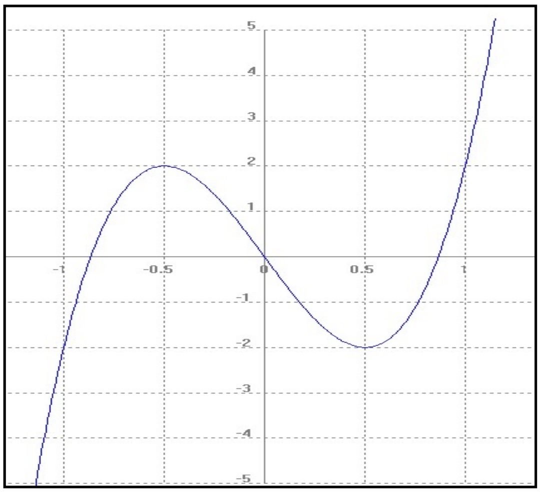
Sea $f$ una función continua definida en un intervalo $[a;b]$. Sean $c$ y $d \in [a;b]$, tales que $f(c) \geq f(x)$, y, $f(d) \leq f(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

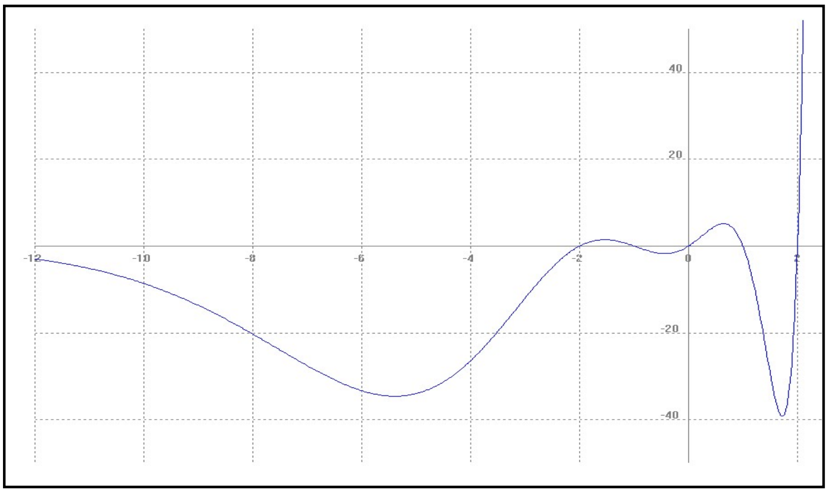
Entonces diremos que el valor $f(c)$ es el **máximo absoluto** de $f$ en $[a;b]$ y que el valor $f(d)$ es el **mínimo absoluto** de $f$ en $[a;b]$

Sea f una función derivable en un intervalo $[a;b]$. Sea $c \in (a;b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Decimos que $f'(c)$ es un **extremo relativo** o **extremo local**, si es posible encontrar un subintervalo de $[a;b]$ que contenga a $c$ en donde *f (c)* sea un extremo absoluto.

Veamos algunos ejemplos:



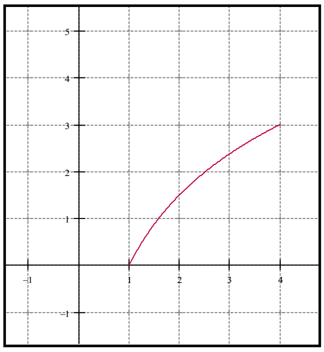
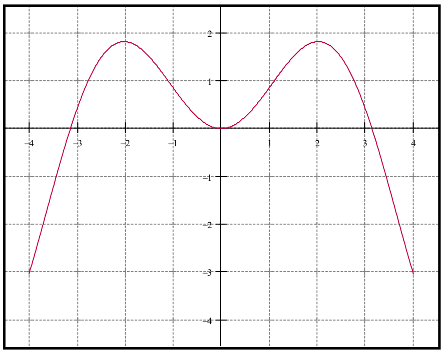
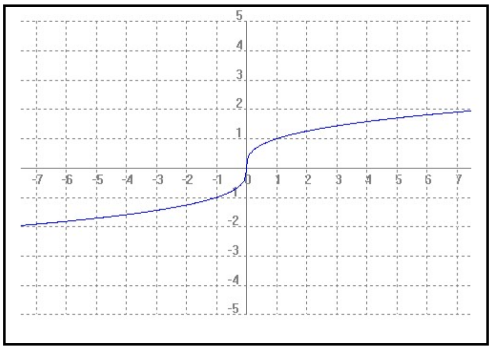




La primera función tiene un máximo en el punto $(-0.5\,;2)$ que es absoluto y relativo, y tiene un mínimo en el punto $(0.5\,;-2)$ que es también absoluto y relativo a la vez (marque estos puntos en el gráfico).
La segunda función tiene máximos relativos en $(-1.5\,;1.5)$ y en $(0.6\,;5.1)$. Este último es también máximo absoluto. Tiene mínimos relativos en $(-5.4\,;-34.6)$, en $(-0.4\,;-1.7)$ y en $(1.7\,;-39.2)$. Este último es también mínimo absoluto (marque estos puntos en el gráfico).

- ## Punto crítico

> Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$. Diremos que un punto $x_0 \in I$ es un **<u>punto crítico</u>** si se verifican alguna de las siguientes condiciones:
>
> i) $x_0$ es uno de los extremos del intervalo $I$.
>
> ii) La derivada en $x_0$ es nula, es decir, $f'(x_0) = 0$
>
> iii) La derivada en $x_0$ no existe, es decir, no existe $f'(x_0)$

Veamos cuáles son los puntos críticos en las siguientes gráficas:

La primera gráfica está definida en el intervalo $[1\,;4]$. Sus puntos críticos son $x=1$ y $x=4$ por ser los extremos del intervalo.
La segunda gráfica está definida en el intervalo $[-4\,;4]$. Sus puntos críticos son $x=-4$ y $x=4$ (por ser los extremos del intervalo) y, $x=-2$, $x=0$ y $x=2$ (porque en esos puntos la derivada es nula).
La tercera gráfica está definida en todos los reales. El único punto crítico es $x=0$ pues en ese punto la derivada no existe (recordar que allí la recta tangente es vertical).

- ## Relación entre punto crítico y extremo

Se cumple la siguiente relación:

> Un extremo es un punto crítico, pero no todo punto crítico es un extremo.

Por lo tanto, para hallar los extremos (máximos y mínimos) de una función, debemos primero hallar los puntos críticos, que serán los "candidatos" a ser extremos. Luego debemos confirmar si efectivamente lo son.

- ## Criterios para hallar los extremos de una función

Veremos dos formas de encontrar los extremos: usando la derivada primera y usando la derivada segunda.

i) **Criterio de la derivada primera**

> Sea $f$ una función y $x_0$ un punto crítico.
> Entonces:
>
> - Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x_0$ y $f'(x) > 0$ a la derecha de $x_0$ entonces en $(x_0; f(x_0))$ hay un MINIMO.
> - Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de $x_0$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x_0$ entonces en $(x_0; f(x_0))$ hay un MAXIMO.
> - Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a derecha y a izquierda de $x_0$, entonces en $(x_0; f(x_0))$ NO HAY UN EXTREMO.

Ejemplo 1:

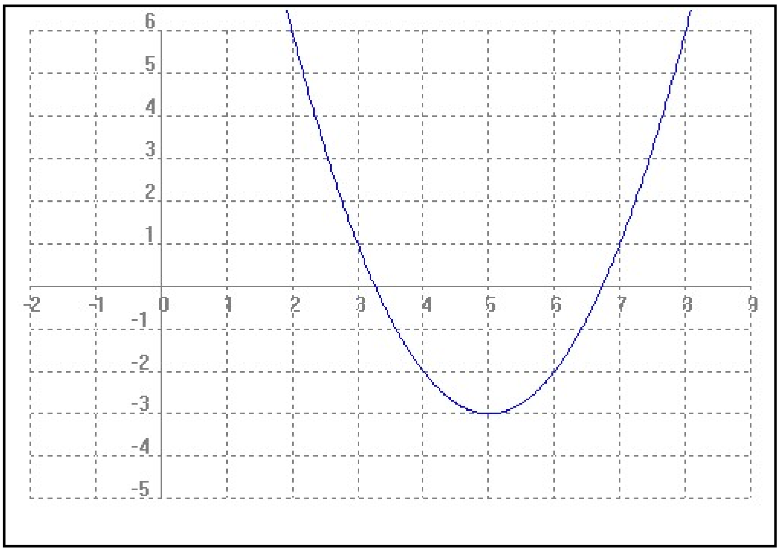
Sea la función $\boxed{f(x) = (x-5)^2 - 3}$. Su derivada primera es $f'(x) = 2 \cdot (x-5)$.
Busco los puntos críticos de la función. Como la derivada existe para todos los reales (por ser una función polinómica), entonces sólo resta analizar dónde la derivada se anula.
Entonces si $f'(x) = 0$ ➔ $2 \cdot (x-5) = 0$ ➔ $x = 5$. Luego el único punto crítico es $\boxed{x_0 = 5}$.

Apliquemos ahora el criterio de la derivada primera. Para ello, debemos analizar el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x_0 = 5$.

Basta con tomar dos valores cercanos a 5, uno menor que él y otro mayor, y evaluar la derivada en esos números.

Por ejemplo, sean 4 y 6 ➔ $f'(4) = -2 < 0$ y $f'(6) = 2 > 0$.

Por lo tanto, en el punto $(5\,;f(5))$ hay un MÍNIMO. Como éste es el único extremo de la función, es un MÍNIMO ABSOLUTO.




Notemos que como esta función es una función cuadrática, el mínimo coincide con el vértice de la parábola.

Ejemplo 2:

Sea la función $\boxed{f(x)=4x^3-3x}$. Su derivada primera es $f'(x)=12x^2-3=3(4x^2-1)=3(2x-1)(2x+1)$. Busco los puntos críticos de la función. Como la derivada existe para todos los reales (por ser una función polinómica), entonces sólo resta analizar dónde la derivada se anula.

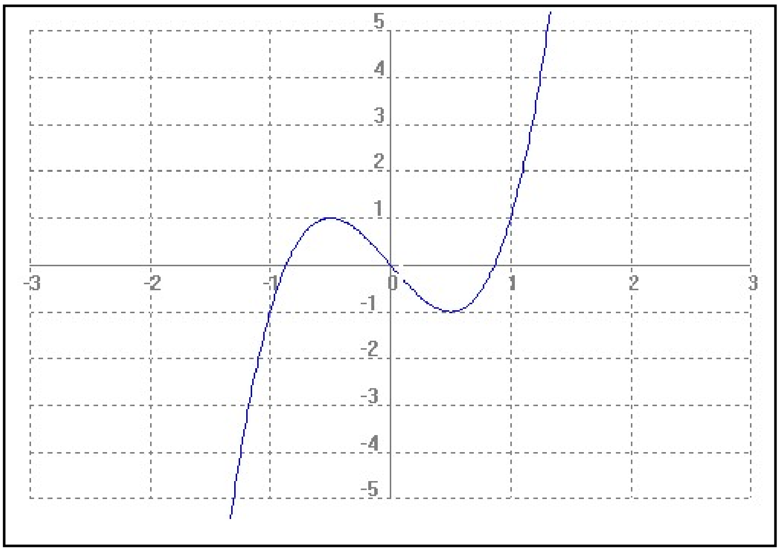
Entonces $f'(x)=0$ ➔ $3\cdot(2x-1)(2x+1)=0$ . Luego los puntos críticos son $\boxed{x_1=-\frac{1}{2}}$ y $\boxed{x_2=\frac{1}{2}}$

Apliquemos ahora el criterio de la derivada primera. Para ello, debemos analizar el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de ambos puntos críticos.

Para el caso de $x_1=-\frac{1}{2}$ tomo el – 1 y el 0. Entonces: $f'(-1)=9>0$ y $f'(0)=-3<0$. Luego, en el punto $\left(-\frac{1}{2}\,;f(-\frac{1}{2})\right)$ hay un MAXIMO.

Para el caso de $x_2=\frac{1}{2}$ tomo el 0 y el 1. Entonces: $f'(0)=-3<0$ y $f'(1)=9>0$. Luego, en el punto $\left(\frac{1}{2}\,;f(\frac{1}{2})\right)$ hay un MINIMO.

Como son los únicos máximos y mínimos de toda la función, entonces ambos son ABSOLUTOS.




ii) **Criterio de la derivada segunda**

Sea $f$ una función y $x_0$ un punto crítico.
Entonces:

- Si $f''(x_0)<0$ entonces en $(x_0;f(x_0))$ hay un MAXIMO.
- Si $f''(x_0)>0$ entonces en $(x_0;f(x_0))$ hay un MINIMO.
- Si $f''(x_0)=0$ entonces en $(x_0;f(x_0))$ NO HAY UN EXTREMO.

Ejemplos:

Vamos a encontrar los extremos de las dos funciones anteriores, utilizando este criterio.

Para el primer ejemplo, la función es $\boxed{f(x)=(x-5)^2-3}$. Su derivada primera es $f'(x)=2\cdot(x-5)$ y su derivada segunda es $f''(x)=2$.

Evaluamos la derivada segunda en el punto crítico $x_0=5$ ➔ $f''(5)=2>0$. Por lo tanto, en el punto $(5\,;f(5))$ hay un MINIMO.

Para el segundo ejemplo la función es $\boxed{f(x)=4x^3-3x}$. cuyas derivadas primera y segunda son $f'(x)=12x^2-3$ y $f''(x)=24x$.

Evaluando la derivada segunda en los puntos críticos se obtiene:

$f''(-\frac{1}{2})=24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-12<0$. Por lo tanto, en el punto $\left(-\frac{1}{2}\,;f(-\frac{1}{2})\right)$ hay un MAXIMO.

$f''(\frac{1}{2})=24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=12>0$. Por lo tanto, en el punto $\left(\frac{1}{2}\,;f(\frac{1}{2})\right)$ hay un MINIMO.

- **Intervalos de crecimiento**

Una vez determinados los extremos de la función, podemos fácilmente indicar cuáles son los intervalos donde la función crece y decrece.

Para los ejemplos anteriores:

Para la función $\boxed{f(x)=(x-5)^2-3}$ vemos que en $(-\infty;5)$ la función decrece (pues la derivada es negativa) y en $(5;+\infty)$ la función crece (pues la derivada es positiva).

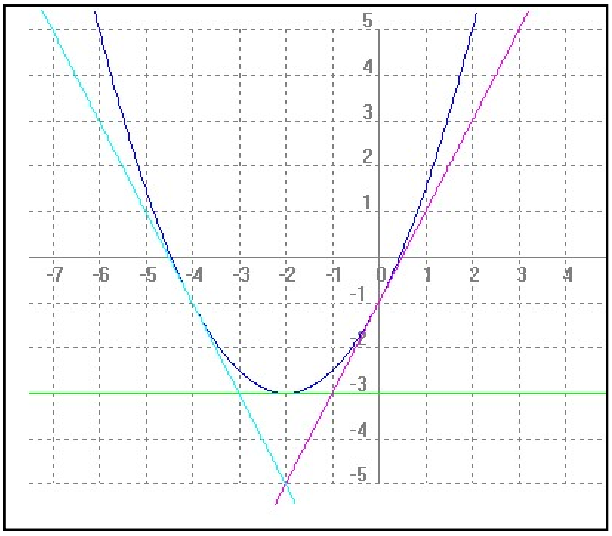
Para la función $\boxed{f(x)=4x^3-3x}$ vemos que en $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ la función crece (pues la derivada es positiva), en $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ decrece (pues la derivada es negativa) y en $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ la función crece nuevamente (pues la derivada es positiva).

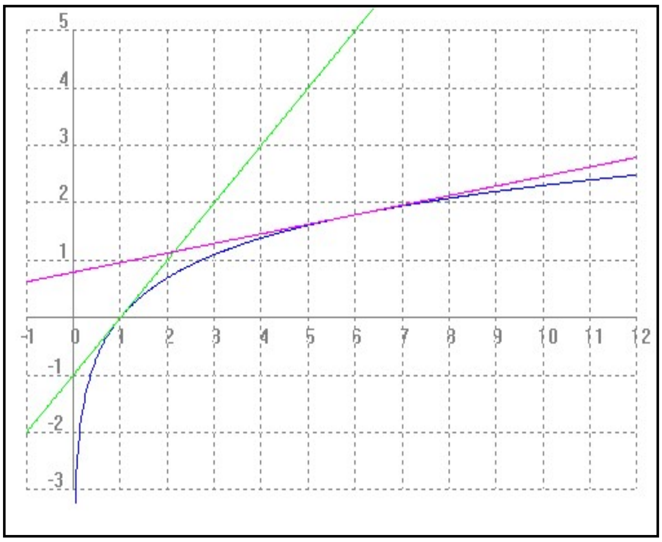
- **Concavidad**

Introduciremos un nuevo concepto que es el de funciones cóncavas hacia abajo y funciones cóncavas hacia arriba.

Definición

| |
|---|
| La gráfica de una función $f$ es **cóncava hacia abajo** (o simplemente **cóncava**) en un punto $(x_0;f(x_0))$ si en ese punto la recta tangente está sobre la curva, y es **cóncava hacia arriba** (o **convexa**) en un punto $(x_0;f(x_0))$ si en ese punto la recta tangente está por debajo de la curva. |



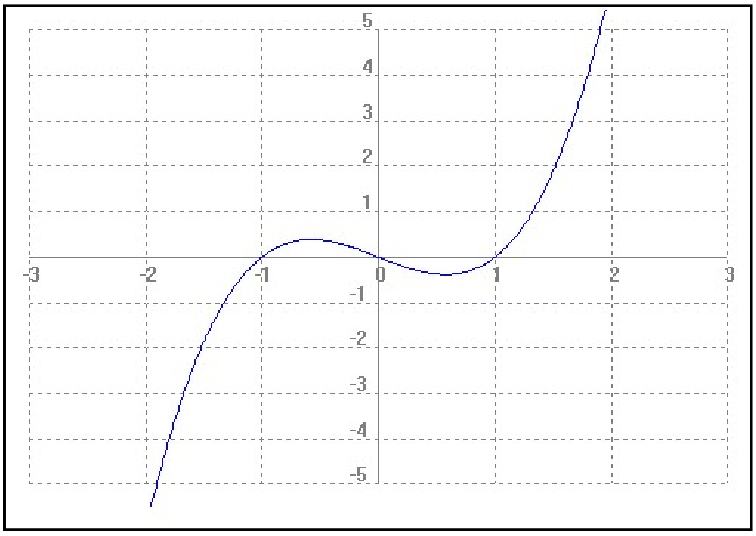



La primera función es cóncava hacia arriba y la segunda es cóncava hacia abajo, en todo su dominio.

- **<u>Intervalos de concavidad</u>**

No siempre una función mantiene su concavidad en todo su dominio. Cuando eso sucede, debemos determinar los **<u>intervalos de concavidad</u>**.

Por ejemplo, en la función $f(x) = x^3 - x$, cuya gráfica se muestra a continuación, tenemos que en el intervalo $(-\infty;0)$ la función es cóncava hacia abajo, y en $(0;+\infty)$ es cóncava hacia arriba.



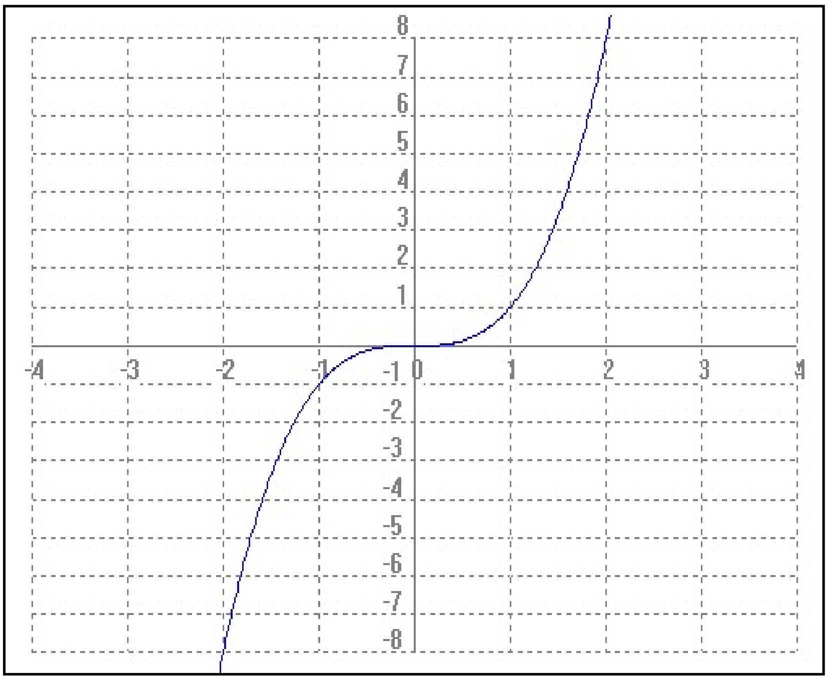

- **<u>Relación entre la concavidad de una función y el signo de la derivada segunda</u>**

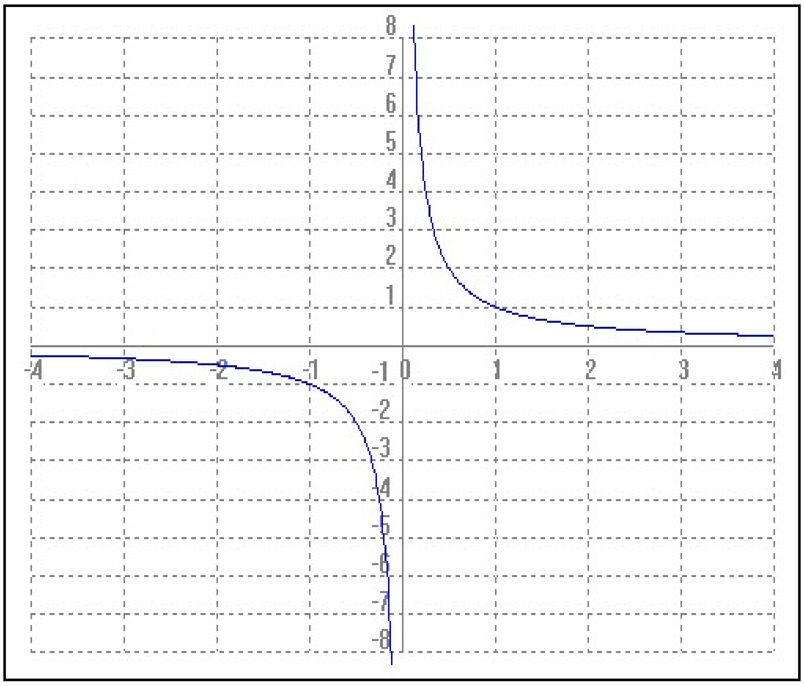
De la misma manera que al principio de este apunte analizamos la relación existente entre el crecimiento de una función y el signo de la derivada primera de la función, estudiaremos ahora la relación que hay entre la concavidad de una función y el signo de la derivada segunda.

Analizaremos los mismos dos ejemplos del inicio:

<u>Ejemplo 1</u>

Sea la función $\boxed{f(x)=x^3}$, con dominio en $R$. Su derivada primera es $f'(x)=3x^2$ y su derivada segunda es $f''(x)=6x$. Vemos que si $x>0$ se cumple que $f''(x)>0$ y si $x<0$, $f''(x)<0$.
Además, si $x>0$ la función es cóncava hacia arriba, y si $x<0$, es cóncava hacia abajo.




<u>Ejemplo 2</u>

Consideremos ahora la función $\boxed{g(x)=\frac{1}{x}}$.

Su derivada primera es $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$ y su derivada segunda es $g'(x)=\frac{2}{x^3}$.Vemos que si $x>0$ se cumple que $f''(x)>0$ y si $x<0$, $f''(x)<0$.
La función $g(x)$ es cóncava hacia abajo si $x<0$ y cóncava hacia arriba si $x>0$.

Como vemos, el hecho de que una función sea <u>cóncava hacia arriba o hacia abajo</u> está relacionado con que la derivada segunda sea <u>positiva o negativa</u>.

Se cumple la siguiente propiedad:

> Sea $f$ una función derivable en $x_0$.
> - Si $f''(x_0)>0$ entonces $f$ es <u>cóncava hacia arriba</u> en $x_0$.
> - Si $f''(x_0)<0$ entonces $f$ es <u>cóncava hacia abajo</u> en $x_0$.

Pero ¿cómo encontrar cuál es el punto en el que la función cambia su concavidad? Para eso debemos introducir un nuevo concepto, que es el de <u>**punto de inflexión**</u>.

- **Punto de inflexión**

Un punto $x_0$ se llama **punto de inflexión** si en ese punto la función cambia su concavidad, es decir, a la derecha de él la función es cóncava hacia arriba y a la izquierda es cóncava hacia abajo, o al revés.

- **Criterio para hallar los puntos de inflexión de una función**

Sea $f$ una función y $x_0$ un punto crítico tal que $f''(x_0)=0$.
Entonces:

- Si $f''(x)<0$ a la izquierda de $x_0$ y $f''(x)>0$ a la derecha de $x_0$, o al revés, entonces en $(x_0; f(x_0))$ hay un PUNTO DE INFLEXION.
- Si $f''(x)$ tiene el mismo signo a derecha y a izquierda de $x_0$, entonces en $(x_0; f(x_0))$ NO HAY UN PUNTO DE INFLEXION.

Ejemplo:

Sea $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}}$ ➔ $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ➔ $f''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

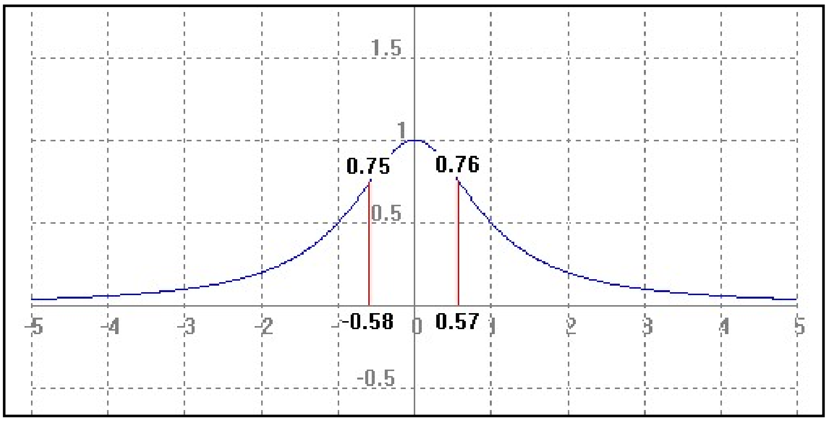
Veamos dónde se anula la segunda derivada: $f''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0$ ➔ $6x^2-2=0$ ➔ $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

Por lo tanto hay dos posible puntos de inflexión: $\boxed{x_1=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-0{,}58}$ y $\boxed{x_2=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=0{,}58}$

Ahora analizamos el signo de la derivada segunda a la izquierda y a la derecha de cada uno de estos puntos. Para esto tomo, – 1 y 0, y 0 y 1.

Entonces: $f''(-1)=\dfrac{1}{2}>0$ y $f''(0)=-2<0$ ➔ en $(-0{,}58\,;\,f(-0{,}58))$ hay un PUNTO DE INFLEXION.

Además: $f''(0)=-2<0$ y $f''(1)=\dfrac{1}{2}>0$ y ➔ en $(0{,}58\,;\,f(0{,}58))$ hay otro PUNTO DE INFLEXION.




Por lo tanto, los intervalos de concavidad de esta función son: en $(-\infty;-0{,}58)$ la función es cóncava hacia arriba, en $(-0{,}58;0{,}58)$ es cóncava hacia abajo y en $(0{,}58;+\infty)$ es cóncava hacia abajo.