PROGRESIONES ARITMETICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economia
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 1ero
Año: 2016

Una **progresión aritmética** (P.A.) es una sucesión tal que cada término de obtiene sumando un número constante al anterior. Este número constante se llama **razón** de la P.A.

Ejemplos:

1) La sucesión 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, … es una P.A. de razón $r = 3$. Esta sucesión puede escribirse por comprensión así:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \quad \forall n > 1 \end{cases}}$$

Vemos que el término general es $\boxed{a_n = 2 + 3(n-1)}$

2) La sucesión 4, 2, 0, -2, -4, -6, … es una P.A. de razón $r = -2$. Esta sucesión puede escribirse por comprensión así:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} - 2 \quad \forall n > 1 \end{cases}}$$

Vemos que el término general es $\boxed{a_n = 4 + (-2)(n-1)}$

Fórmula del término enésimo de una P.A.

Si $a(n) = \{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}, \cdots$ es una P.A. entonces el término enésimo o término general es igual a: $a_n = a_1 + r \cdot (n-1)$

Observación: *en algunos casos se consideran P.A. con un número **finito** de términos, o sea, podemos tomar una **parte** de la sucesión.*

Ejemplos:

1) En una P.A. de razón $\left(-\frac{1}{2}\right)$ el primer término es 1. ¿Cuál es el sexto término?

Como $a_n = a_1 + r \cdot (n-1)$ y $a_1 = 1$, $r = -\frac{1}{2}$ y $n = 6$ tenemos que $a_6 = 1 - \frac{1}{2}(6-1) = 1 - \frac{5}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

2) En una P.A. de once términos los dos últimos son $-\frac{3}{7}$ y 1. ¿Cuál es el primer término?

Como la razón es la diferencia entre dos términos consecutivos, tenemos que $r = 1 - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{10}{7}$

Además: $n = 11$ y $a_{11} = 1$. Entonces: $a_1 = a_n - r(n-1) = 1 - \frac{10}{7}(11-1) = \boxed{-\frac{93}{7}}$

3) El primero y el quinto términos de una P.A. son $\frac{1}{10}$ y $-\frac{3}{4}$. Calcular la razón.

Como $a_n = a_1 + r \cdot (n-1)$ entonces $r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ ➔ $r = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{10}}{5-1} = \frac{-\frac{34}{10}}{4} = \boxed{-\frac{17}{80}}$

4) ¿Cuántos términos tiene una P.A. de razón $\frac{2}{5}$ sabiendo que el segundo término es cero y el último es $\frac{18}{5}$?

Si $a_2 = 0$ y $r = \frac{2}{5}$ entonces $a_1 = a_2 - r = -\frac{2}{5}$

Como $a_n = a_1 + r \cdot (n-1)$ entonces $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$ ➔ $n = \frac{\frac{18}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{5}} + 1 = \boxed{11}$

Problemas de aplicación

(I) Depreciación de una máquina

Una fábrica compra una maquinaria a 1700 dólares. El valor de la máquina se deprecia anualmente en 150 dólares y su valor de desecho es de 200 dólares. ¿Cuál es la vida útil de la máquina?

Solución:

Debemos hallar el número de años después de los cuáles el valor de la máquina se ha reducido a un valor de desecho de 200 dólares.

Dado que el valor de la máquina se deprecia 150 dólares cada año, su valor al finalizar el primer año será $(1700-150)=1550$, al finalizar el segundo año será $(1700-2\cdot 150)=1400$, al finalizar el tercero será $(1700-3\cdot 150)=1250$, y así sucesivamente.

Podemos formar una P.A. con estos valores, siendo $a_1 = 1550$, $a_2 = 1400$, $a_3 = 1250$, …

La razón es la diferencia entre dos términos consecutivos. Por ejemplo: $r = a_2 - a_1 = 1400 - 1550 = -150$

El término general es: $a_n = a_1 + r \cdot (n-1) = 1550 - 150(n-1)$

Para hallar la vida útil de la máquina debemos averiguar en cuántos años se convertirá en desecho, es decir, cuando $a_n = 200$.

Entonces: $a_n = 1550 - 150(n-1) = 200$

Despejando n de esta expresión obtenemos: $n = 10$. Por lo tanto, la vida útil de la máquina es de 10 años.

(II) Interés Simple

Supongamos que disponemos de un capital y lo depositamos en un banco que nos otorga un tanto por ciento anual de intereses y podemos optar por la capitalización o no de los intereses. En el caso del Interés Simple significa que optamos por la no capitalización de los intereses.

Supongamos que nuestro capital inicial es C_1. Entonces:

- al cabo de un año tendremos un capital $C_2 = C_1 + C_1 I$
- al cabo de dos años tendremos un capital $C_3 = C_2 + C_1 I = C_1 + 2C_1 I$
- al cabo de tres años tendremos un capital $C_4 = C_3 + C_1 I = C_1 + 3C_1 I$
- y así sucesivamente.

Al cabo de n años tendremos un capital $\boxed{C_n = C_1 + (n-1)C_1 I}$ que es una P.A. de razón $C_1 I$.

Por ejemplo, supongamos que disponemos de 20.000$ y lo depositamos en un banco a una tasa del 8 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 5 años?

En este caso el primer término es $C_1 = 20.000$ y la razón $C_1 I = 20000 \cdot 0{,}08 = 1600$.

Al cabo de 5 años tendremos: $C_5 = C_1 + (5-1)C_1 I = 20000 + 4 \cdot 1600 = \boxed{26400}$

Ejercicios:

1) Escribir los seis primeros términos de las siguientes P.A.:

a) $a_1 = 3 \quad ; \quad r = \dfrac{1}{2}$ b) $a_1 = -\dfrac{1}{2} \quad ; \quad r = \dfrac{1}{4}$ c) $a_1 = \sqrt{3} \quad ; \quad r = 2\sqrt{3}$

2) Calcular la razón si: a) $a_7 = -8 \quad ; \quad a_8 = -14$ b) $a_3 = \dfrac{7}{6} \quad ; \quad a_6 = \dfrac{2}{3}$

3) Calcular el término enésimo si: a) $a_1 = -5 \quad ; \quad r = 2 \quad ; \quad n = 21$ b) $a_1 = -7 \quad ; \quad r = -4 \quad ; \quad n = 10$

4) Calcular el primer término si: a) $a_n = 9 \quad ; \quad r = -2 \quad ; \quad n = 52$ b) $a_n = 25 \quad ; \quad r = 3 \quad ; \quad n = 9$

5) Calcular la razón si: a) $a_1 = \dfrac{7}{8} \quad ; \quad a_n = \dfrac{7}{4} \quad ; \quad n = 15$ b) $a_1 = 1{,}8 \quad ; \quad a_n = 14{,}2 \quad ; n = 10$

6) Calcular la cantidad de térm. si: a) $a_1 = 10 \quad ; a_n = 28 \quad ; r = \dfrac{1}{2}$ b) $a_1 = -\sqrt{3} \quad ; a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad ; r = \sqrt{3}$

7) La suma de tres términos consecutivos en una P.A. es 30, y la suma de sus cuadrados es 318. ¿Cuáles son los números? (Rta: 7, 10 y 13)

Suma de los n primeros términos de una P.A.

La suma de los n primeros términos de una P.A. es igual a la semisuma del primer y enésimo términos, por la cantidad n de términos.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demostración)

Si S_n es la suma de los n primeros términos de la P.A. entonces: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Por la propiedad conmutativa podemos escribir que: $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$

Sumando ambas igualdades miembro a miembro:

$$S_n + S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \qquad (*)$$

Veamos que cada término entre paréntesis de la expresión (*) es igual a $(a_1 + a_n)$:

El término $(a_2 + a_{n-1})$ se puede escribir como: $(a_{1+1} + a_{n-1})$

El término $(a_3 + a_{n-2})$ se puede escribir como: $(a_{1+2} + a_{n-2})$

El término $(a_4 + a_{n-3})$ se puede escribir como: $(a_{1+3} + a_{n-3})$

En general: el término $(a_k + a_{n-h})$ se puede escribir como: $(a_{1+h} + a_{n-h})$

Ahora, aplicando la fórmula del término general que dice que $a_n = a_1 + r\cdot(n-1)$ tenemos que:

$$a_{1+h} = a_1 + r\cdot(1+h-1) = a_1 + r\cdot h$$

$$a_{n-h} = a_1 + r\cdot(n-h-1) = a_1 + r\cdot(n-1) - r\cdot h$$

Entonces: $$a_{1+h} + a_{n-h} = [a_1 + r\cdot h] + [a_1 + r\cdot(n-1) - r\cdot h] = a_1 + [a_1 + r\cdot(n-1)] = a_1 + a_n$$

Por lo tanto, todos los términos entre paréntesis de la expresión (*) equivalen a $(a_1 + a_n)$.

Luego, la expresión (*) nos queda: $2\cdot S_n = (a_1 + a_n)\cdot n$ ➔ $\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$

<u>Ejemplos:</u>

1) Calcular la suma de los 12 primeros términos de una P.A. cuyos dos primeros términos son 3 y 2,8.

Primero hallamos la razón, que es igual a la diferencia entre los dos primeros términos.
Es decir $r = 2{,}8 - 3 = -0{,}2$

Luego hallamos el último término. Como $a_n = a_1 + r\cdot(n-1)$ entonces $a_{12} = 3 + (-0{,}2)(12-1) = 0{,}8$

Entonces $S_{12} = \sum_{i=1}^{12} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} = \frac{(a_1 + a_{12})\cdot 12}{2} = \frac{(3+0{,}8)\cdot 12}{2} = \boxed{22{,}8}$

2) Escribir los doce primeros términos de la P.A. anterior y verificar que la suma obtenida es la correcta.

Los doce primeros términos son: 3 ; 2,8 ; 2,6 ; 2,4 ; 2,2 ; 2 ; 1,8 ; 1,6 ; 1,4 ; 1,2 ; 1 ; 0,8

La suma es: 3 + 2,8 + 2,6 + 2,4 + 2,2 + 2 + 1,8 + 1,6 + 1,4 + 1,2 + 1 + 0,8 = $\boxed{22{,}8}$

<u>Gauss y las progresiones aritméticas</u>

*A los nueve años **Carl Friedrich Gauss** (1777-1885) asiste a su primera clase de Aritmética. El profesor propone a su centenar de pupilos un problema terrible: calcular la suma de los cien primeros números enteros. Nada más terminar de proponer el problema, el jovencito Gauss traza un número en su pizarrón y lo deposita en la mesa del maestro. Había escrito 5.050. La respuesta correcta.*
Ante los ojos atónitos del profesor y del resto de sus compañeros, Gauss había aplicado, por supuesto sin saberlo, el algoritmo de la suma de los términos de una progresión aritmética. Se había dado cuenta de que la suma de la primera y la última cifra daba el mismo resultado que la suma de la segunda y la penúltima, etc., es decir: 1+ 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 101
Como hay 50 parejas de números de esta forma el resultado se obtendrá multiplicando 101 . 50 = 5.050

Ejercicios:

1) Hallar la suma de los siete primeros términos de una P.A. de razón $\frac{1}{3}$ cuyo primer término es 2. (Rta: 21)

2) Los primeros 37 términos de una P.A. de razón $r = -0{,}3$ suman 222. Calcular el primer y último términos. (Rta: 11,4 y 0,6)

3) Para una empalizada se utilizan 75 troncos, de los cuales el más bajo es de 90 cm, y los otros van siendo, sucesivamente, 10 cm más alto que el anterior. Expresar en metros la longitud total de troncos que se utiliza. (Rta: 345 mts)

4) Una persona saca un préstamo en un banco. Debe pagar 15 cuotas mensuales. Los pagos forman una PA. Si sus pagos sexto y décimo son de \$34.500 y \$33.300, respectivamente, ¿De qué monto será la última cuota? ¿Cuánto pagó al banco en total? (Rta: 31.800\$ y 508.500\$).

5) ¿Cuántos años debe un señor depositar en un banco un capital de 150000\$ a una tasa del 15 % anual para obtener 200000\$? (Rta: 3 años y 3 meses)

6) Una señora retira el dinero depositado tras 4 años en un banco a una tasa del 11 % anual. El capital retirado asciende a 32000\$. ¿Cuál fue el capital que depositó? (Rta: 24060\$)

7) Un señor tiene una deuda de 36000\$. Se compromete a pagarla en 40 cuotas mensuales. Cuando 30 de los 40 pagos se han cubierto, el deudor fallece dejando una tercera parte de la deuda sin cancelar. ¿Cuál fue el valor de primer pago? (Rta: 510\$)

8) Calcular cuántos días estuvo trabajando un camarero en un establecimiento sabiendo que el primer día recibió una propina de 10 \$, y que cada día que pasaba recibía 3 \$ más de propina, llegando a cobrar el último día 55 \$. (Rta: 16 días)

9) Si consideramos diez términos consecutivos de una P.A. y sabemos que los dos extremos suman 22 y el producto de tercer y cuarto términos es 48, hallar todos los términos de la progresión. (Rta: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)

10) Si consideramos doce términos consecutivos de una P.A., la diferencia entre el último término y el primero es 55, y la suma del cuarto y octavo términos es 56, hallar los extremos. (Rta: 3 y 58)

11) Calcular la suma de:

a) los sesenta primeros números naturales.
b) los treinta primeros números pares.
c) los noventa primeros números impares.
d) los cincuenta primeros múltiplos de 3.
e) los múltiplos de 5 menores que 200.
f) los múltiplos de 4 comprendidos entre 50 y 200.