APUNTE: TRIGONOMETRIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economía
Profesor: Prof. Mabel S. Chrestia
Cuatrimestre: 1ero
Año: 2016

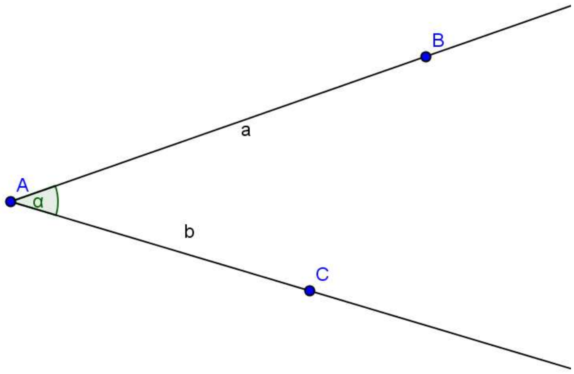
- **Conceptos Previos**
- **Definición de ángulo**

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas de origen común.

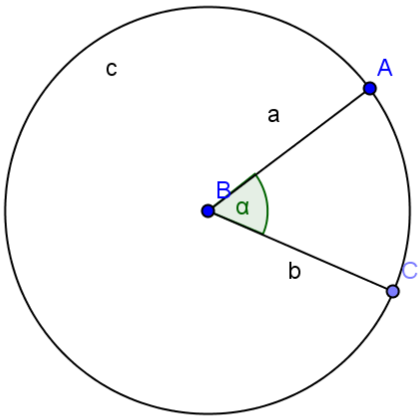
Este punto en común es el vértice del ángulo y las semirrectas son los lados del ángulo.

Los ángulos se denominan generalmente con letras griegas: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, ...

Si llamamos A al origen de las semirrectas, y B y C son dos puntos en cada una de las semirrectas, entonces el ángulo $\hat{\alpha} = ángulo(BAC)$.



Dada una circunferencia, se llama ángulo central, a aquel cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia, y sus lados son dos radios de la misma.



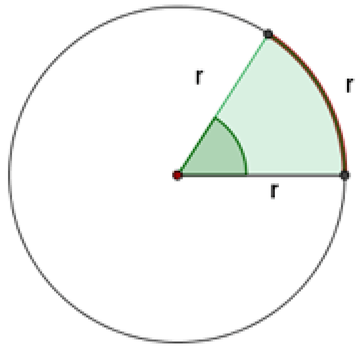
- **Sistemas de medición de ángulos**

Los sistemas más utilizados son el sistema sexagesimal y el sistema circular.

El sistema sexagesimal tiene como unidad al grado sexagesimal. Un grado sexagesimal es la amplitud del ángulo que se obtiene al dividir a la circunferencia en 360 partes iguales.

Este sistema tiene como submúltiplos al minuto y al segundo. 60 minutos equivalen a un grado sexagesimal, y 60 segundos a un minuto.

Es decir: $1^{\circ} = 60' = 3600''$.



El sistema circular tiene como unidad al radián. Un radián (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud del radio de la circunferencia.

Entre ambos sistemas podemos hallar equivalencias.

$360^\circ = 2\pi\ rad \rightarrow 180^\circ = \pi\ rad \rightarrow 90^\circ = \pi/2\ rad$

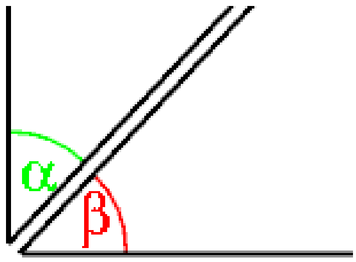
Veamos a cuántos grados sexagesimales equivale un ángulo de un radián.

$$2\pi\ rad \;------------\; 360^\circ$$

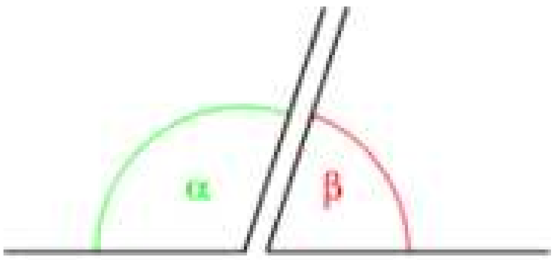
$$1\ rad \;-------------\; x = \frac{360^\circ \cdot 1\ rad}{2\pi\ rad} = 57{,}29^\circ$$

- **Angulos complementarios y suplementarios**

Dos ángulos son complementarios si su suma es igual a un ángulo recto, es decir a un ángulo de 90º.

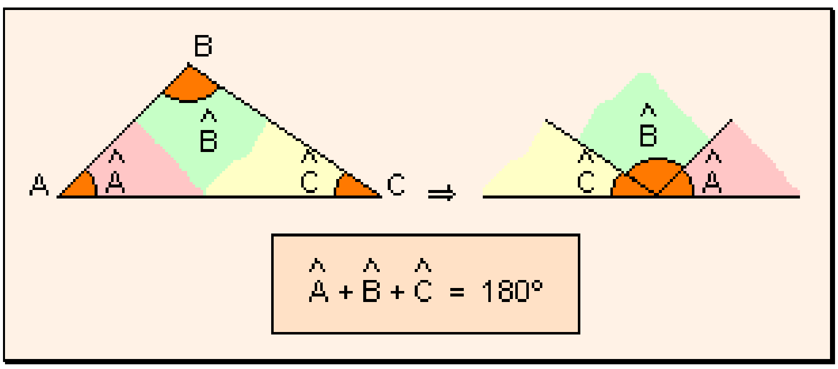


Dos ángulos son suplementarios si su suma es igual a un ángulo llano, es decir a un ángulo de 180º.



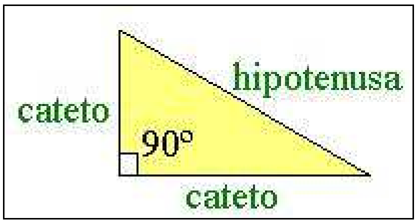
- **Suma de los ángulos interiores de un triángulo**

En cualquier triángulo se cumple que la suma de los ángulos interiores es igual a 180º.



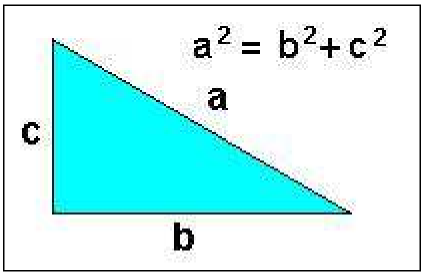
- **Teorema de Pitágoras**

Recordemos que en un triángulo rectángulo, los lados del mismo se llaman hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) y catetos (los lados que forman el ángulo recto).



Entonces, el Teorema de Pitágoras puede enunciarse de la siguiente manera:

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."

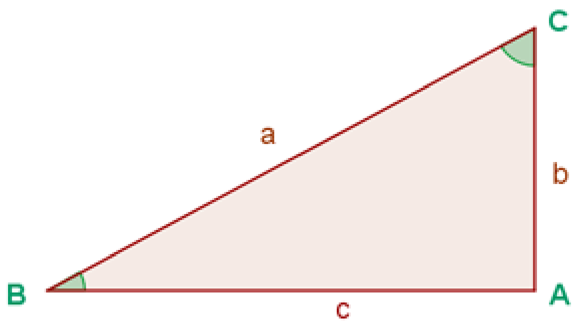


- **Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo**

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, donde a es la hipotenusa y, b y c son los catetos.

Sean $\hat{B}$ y $\hat{C}$ los dos ángulos agudos del triángulo, y sea $\hat{A}$ el ángulo recto.

Consideramos el ángulo $\hat{B}$, y definimos los siguientes cocientes, a los que llamamos razones trigonométricas del ángulo *B*:



$sen\ B = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$;	$\cos B = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$;	$tg\ B = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
$\cot g\ B = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$;	$\sec B = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$;	$\cos ec\ B = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

Por lo tanto: $sen\ B = \dfrac{b}{a}$; $\cos B = \dfrac{c}{a}$; $tg\ B = \dfrac{b}{c}$; $\cot g\ B = \dfrac{c}{b}$; $\sec B = \dfrac{a}{c}$; $\cos ec\ B = \dfrac{a}{b}$

Si consideramos ahora el otro ángulo agudo, $\hat{C}$, obtendremos que las razones trigonométricas del ángulo *C* son:

$$sen\ C = \frac{c}{a} \ ;\ \cos C = \frac{b}{a} \ ;\ tg\ C = \frac{c}{b} \ ;\ \cot g\ C = \frac{b}{c} \ ;\ \sec C = \frac{a}{b} \ ;\ \cos ec\ C = \frac{a}{c}$$

Relaciones entre razones trigonométricas

De lo anterior surge que: $\boxed{sen\ B = \cos C \ \text{ y } \ \cos B = sen\ C}$

Como B y C son dos ángulos complementarios, podemos escribir que:

$$\boxed{sen\ B = \cos(90º - B) \ \text{ y } \ \cos B = sen(90º - B)}$$

Por otro lado se cumple que:

$$\boxed{sen\ B = \frac{1}{\cos ec\ B} \quad ; \quad \cos B = \frac{1}{\sec B} \quad ; \quad tg\ B = \frac{1}{\cot g\ B}}$$

Y también:

$$\boxed{tg\ B = \frac{sen\ B}{\cos B} \quad ; \quad \cot g\ B = \frac{\cos B}{sen\ B}}$$

Identidades trigonométricas

Son igualdades en las que aparecen razones trigonométricas. Nos sirven para poder operar (simplificar, etc.) con expresiones que involucran estas relaciones.

A continuación, se enumeran las principales identidades trigonométricas:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$	$2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha = sen 2\alpha$	
$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$	$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$	$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$	$1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$
$\text{sen}\ A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\text{sen}(A - B) + \text{sen}(A + B))$	$\text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B = \frac{1}{2}((\cos(A - B) - \cos(A + B)))$		
$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B))$			
$sen(A + B) = senA \cdot \cos B + \cos A \cdot senB$	$sen(A - B) = senA \cdot \cos B - \cos A \cdot senB$		
$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - senA \cdot senB$	$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + senA \cdot senB$		

Valores de las razones trigonométricas de ángulos notables

Resulta muy útil conocer los valores del seno y coseno de algunos ángulos muy utilizados, a saber: 0º, 30º, 45º, 60º y 90º.

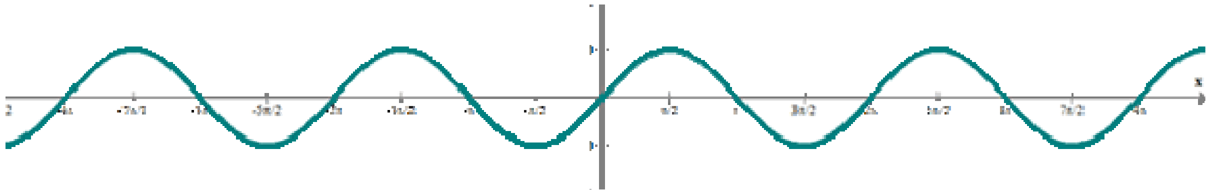
α	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- **Funciones trigonométricas**

A partir de las razones trigonométricas se definen las funciones trigonométricas. Veremos las características principales de cada una de ellas.

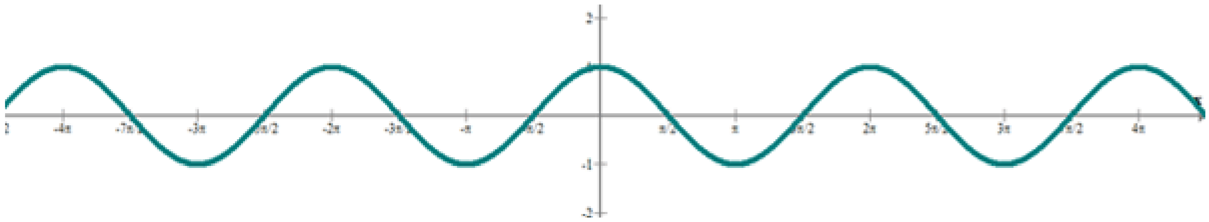
Función Seno

$Dom = R$; $\text{Im} = [-1;1]$; Impar: $sen(-x) = -sen(x)$; $Período = 2\pi$; Continua siempre



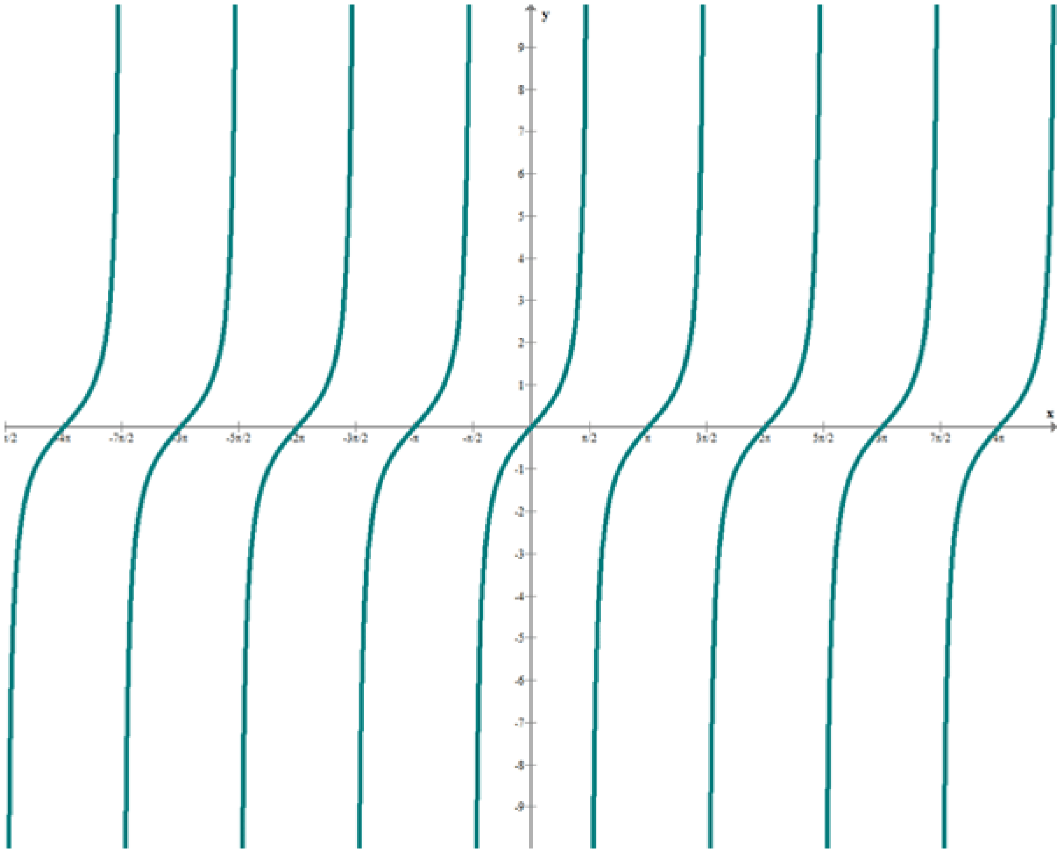
Función Coseno

$Dom = R$; $\text{Im} = [-1;1]$; Par: $\cos(-x) = \cos(x)$; $Período = 2\pi$; Continua siempre



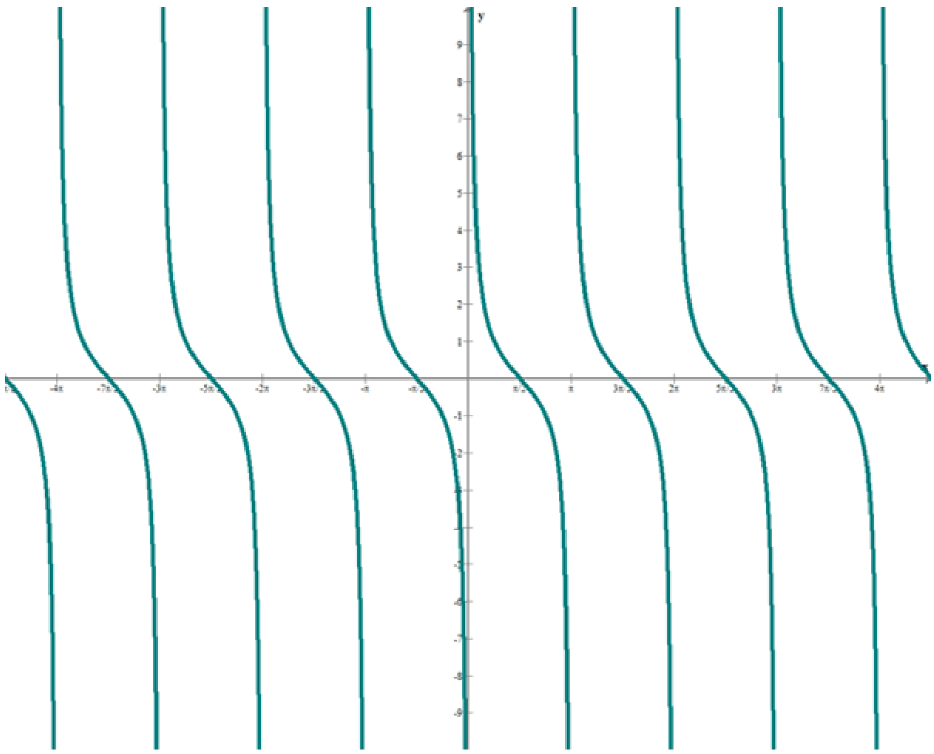
Función Tangente

$Dom = R - \left\{(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$; $\text{Im} = R$; Impar: $tg(-x) = -tg(x)$; $Período = \pi$; Continua en su dominio



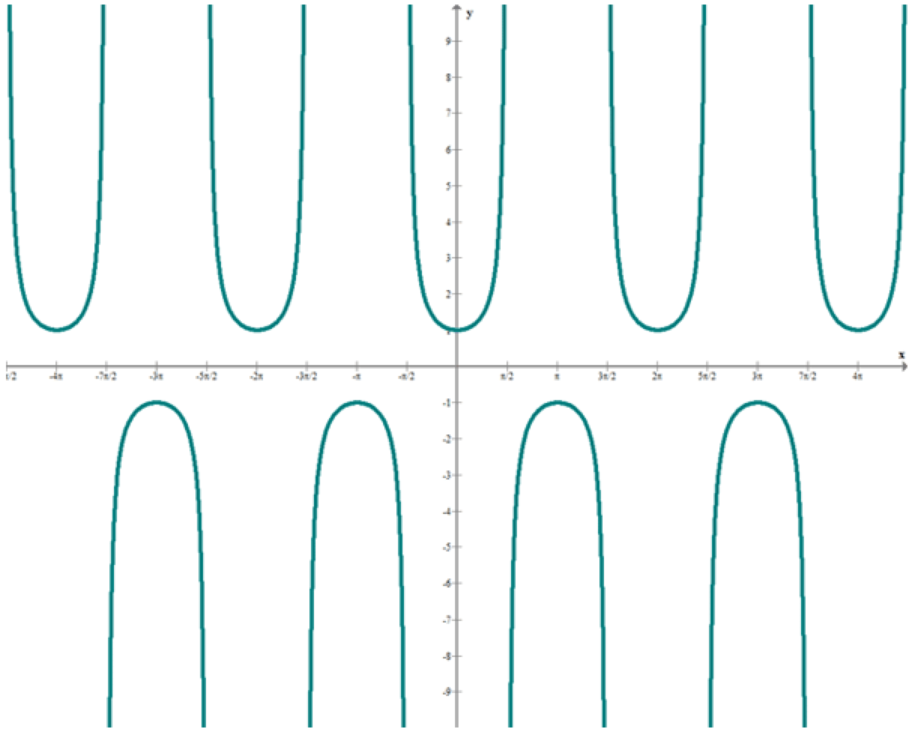
<u>Función Cotangente</u>

$Dom = R - \{k \cdot \pi \, , k \in Z\}$; $\text{Im} = R$; Impar: $\cot g(-x) = -\cot g(x)$; $Período = \pi$; Continua en su dominio



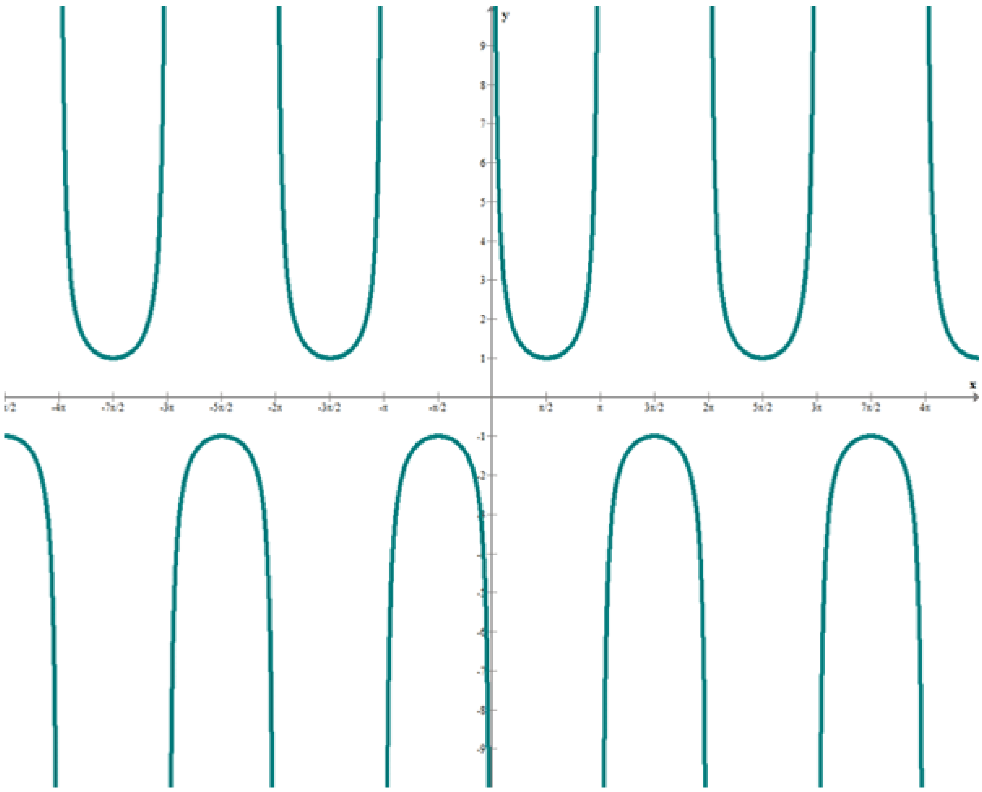
<u>Función Secante</u>

$Dom = R - \left\{ (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \, , k \in Z \right\}$; $\text{Im} = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; Par: $\sec(-x) = \sec(x)$;
$Período = 2\pi$; Continua en su dominio



<u>Función Cosecante</u>

$Dom = R - \{ k\cdot\pi \, , k \in Z \}$; $\text{Im} = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; Par: $\cos ec(-x) = -\cos ec(x)$;
$Período = 2\pi$; Continua en su dominio



- **<u>Ecuaciones trigonométricas</u>**

Son ecuaciones en las cuales la variable es un ángulo, que está afectado por una función trigonométrica.

Para resolver estas ecuaciones deben utilizarse las identidades trigonométricas, y recordar que las funciones trigonométricas son periódicas, por lo cual, pueden tener más de una solución.

Ejemplo: Sea la ecuación $sen(2x) = \frac{1}{2}$ con $0 \le x < 2\pi$.

Sabemos que el seno de un ángulo es igual a un medio cuando el ángulo es igual a 30º o bien a 150º. Entonces:

$2x = 30º$ o $2x = 150º$ ➔ $x = 15º$ o $x = 75º$

En este caso, hay dos soluciones.