APUNTE: CONTINUIDAD

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economía
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 1ero
Año: 2016

- **Definición**

Una función f es **continua** en un punto $x = x_0$ si verifica las siguientes tres condiciones:

i) La función está definida en el punto $x = x_0$.

ii) El límite de la función f cuando x se acerca a x_0 existe y es un valor real finito L.

iii) El valor del límite L coincide con el valor de la función en el punto x_0.

La misma definición usando simbología matemática, se escribe así:

Una función f es **continua** en un punto $x = x_0$ si verifica las siguientes tres condiciones:

i) $\exists f(x_0)$.

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

iii) $f(x_0) = L$

Ejemplos:

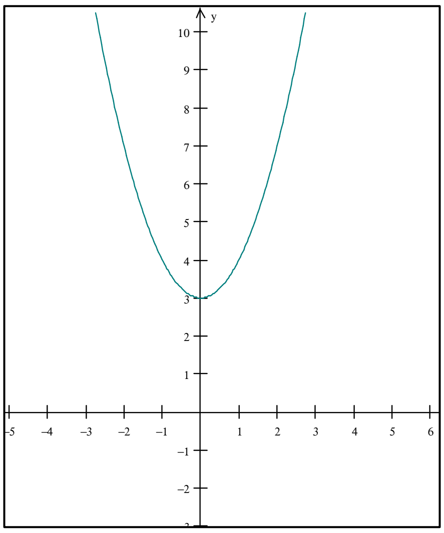
1) Sea la función $f(x) = x^2 + 3$. Analicemos la continuidad en $x = 2$

i) La función está definida en $x = 2$ pues $f(2) = 7$

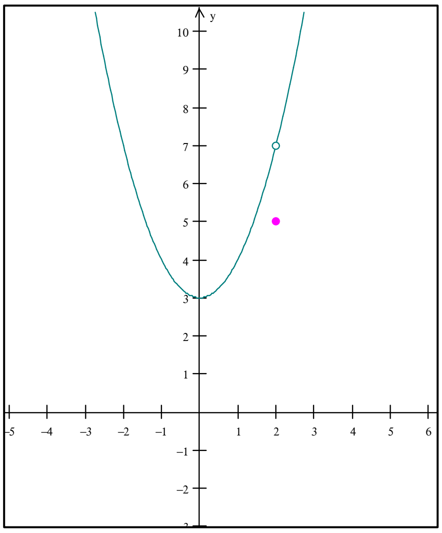
ii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 + 3 = 7 = L$

iii) $f(2) = L = 7$

Por lo tanto, **la función es continua en** $x = 2$**.**



2) Sea ahora la función $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ x\neq 2 \\ 5 & si\ x=2 \end{cases}$.



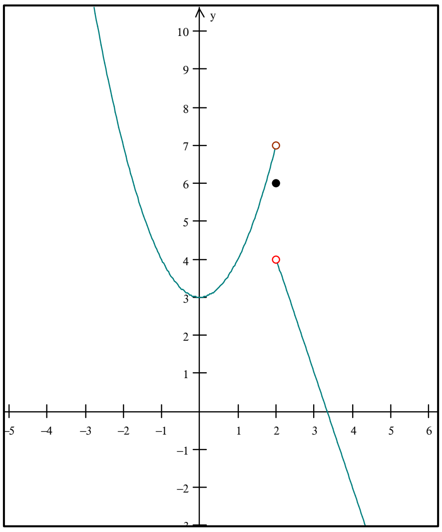
Veamos si es continua en $x=2$

i) La función está definida en $x=2$ pues $f(2)=5$

ii) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+3=7=L$

iii) $f(2)\neq L$

Las dos primeras condiciones se cumplen, no así la tercera. Por lo tanto, **la función no es continua en** $x=2$ **.**



3) Consideremos ahora la función

$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ x<2 \\ 6 & si\ x=2 \\ -3x+10 & si\ x>2 \end{cases}$ .Analicemos la continuidad en $x=2$

i) La función está definida en $x=2$ pues $f(2)=4$

ii) Para saber si existe el límite debemos hallar los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -3x+10=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2+3=7$$

Vemos que los límites laterales existen pero son distintos, por lo que concluimos que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Por lo tanto, la segunda condición no se cumple, y por ende la tercera tampoco.
Luego, **la función no es continua en** $x=2$ **.**

- **<u>Tipos de discontinuidad</u>**

En los ejemplos 2 y 3 anteriores la función es discontinua en el punto considerado, pero ambos casos difieren entre sí, ya que en el ejemplo 2 el límite existe y en el ejemplo 3 no existe.

También observamos que en el ejemplo 2, con tan sólo “mover” el punto (2 ; 5) a la posición (2 ; 7) la función se transformaría en continua. Pero en el ejemplo 3, por más que cambiemos el punto (2 ; 6) de lugar, la función seguirá siendo discontinua.

En el primer caso decimos que la función tiene en $x=2$ una **<u>discontinuidad evitable</u>**, ya que realizando el cambio mencionado, la discontinuidad desaparece, y la función se transforma en continua.

Diremos entonces que **redefinimos la función**, quedando expresada de esta manera:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ x\neq 2 \\ 7 & si\ x=2 \end{cases}$$

En otras palabras, cambiamos la imagen de $x = 2$ para que coincida con el valor del límite en ese punto.

En el segundo caso, la función no puede redefinirse de ninguna manera para hacerla continua. Es decir, la discontinuidad no puede evitarse. Este tipo de discontinuidad se llama **esencial**.

Recordemos entonces que **la discontinuidad en un punto de una función sea evitable o esencial, depende de la existencia o no del límite de la función en ese punto**.

- **Propiedades de las funciones continuas**

(I) Sean f y g dos funciones continuas en un punto $x = x_0$.
Entonces:
a) $(f+g)$, $(f-g)$ y $(f \cdot g)$ son continuas en $x = x_0$
b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ es continua en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$

(II) Si $\mathrm{Im}(g) \subseteq Dom(f)$ y g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $(f \circ g)$ es continua en x_0.

- **Continuidad de las funciones elementales**

Una función es **continua en un intervalo** si lo es en cada uno de los puntos del intervalo. Una función es **continua en todo su dominio**, si lo es en cada uno de los puntos del dominio.

Las funciones siguientes son todas continuas en su dominio: las funciones polinómicas, valor absoluto, racionales, logarítmica, exponencial, trigonométricas.

Al decir "continuas en todo su dominio" queda claro que en los puntos que no pertenecen al dominio, la función no es continua (ya que no se cumple la primer condición de continuidad en un punto).

Ejemplo

Una empresa turística, para promocionar una excursión, ofrece un precio especial para grupos mayores de 10 personas. El precio de venta de la excursión es de 120$ por pax. Para grupos mayores de 10 integrantes, el precio por pax se reduce un 20 %.

La función que representa el importe total a pagar es: $P(x) = \begin{cases} 120x & si \;\; x \leq 10 \\ 96x & si \;\; x > 10 \end{cases}$.

Esta es una función discontinua en $x = 10$ ya que

i) $P(10) = 1200$

ii) $\lim\limits_{x \to 10^-} P(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} 120x = 1200$ y $\lim\limits_{x \to 10^+} P(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} 96x = 960$

Por lo tanto no existe $\lim\limits_{x \to 10} P(x)$. La discontinuidad es esencial.