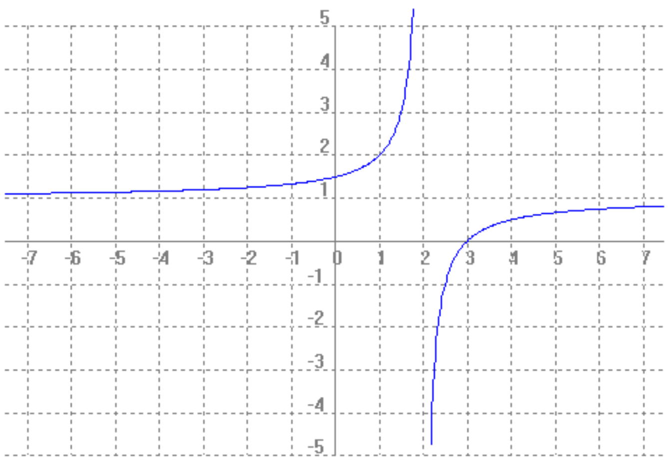
APUNTE: ASINTOTAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
<u>Asignatura</u>: Matemática 1
<u>Carreras</u>: Lic. en Economía
<u>Profesor</u>: Prof. Mabel Chrestia
<u>Semestre</u>: 1ero
<u>Año</u>: 2016

- **<u>Definición</u>**

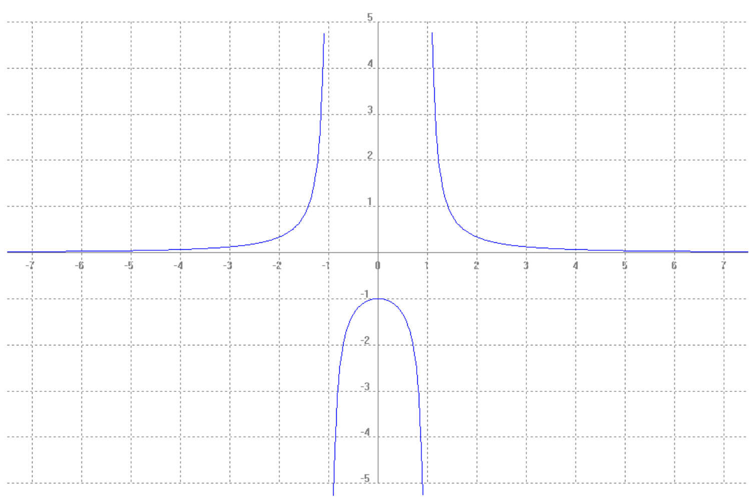
Diremos que la recta $y = ax + b$ es **<u>ASINTOTA</u>** de una función $f(x)$ si cuando las variables x ó y crecen (o decrecen) indefinidamente, la gráfica de la función se acerca cada vez más a la recta.

Veamos algunos ejemplos gráficos:

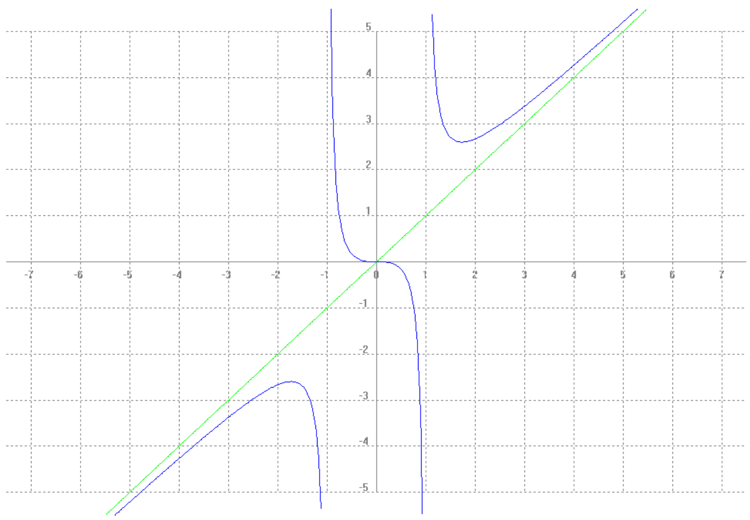


En esta función, cuando x crece o decrece indefinidamente (es decir, cuando $x \to \pm\infty$), la función se acerca cada vez más a la recta horizontal $y = 1$. Además, cuando y crece o decrece indefinidamente, la función se acerca cada vez más a la recta vertical $x = 2$.
Por lo tanto, la recta $y = 1$ es la ASINTOTA HORIZONTAL de la función, y la recta $x = 2$ es la ASINTOTA VERTICAL de la función.

En esta función, cuando x crece o decrece indefinidamente (es decir, cuando $x \to \pm\infty$), la función se acerca cada vez más a la recta horizontal $y = 0$. Además cuando y crece o decrece indefinidamente, la función se acerca cada vez más a las rectas verticales $x = 1$ y $x = -1$.
Por lo tanto, la recta $y = 0$ es la ASINTOTA HORIZONTAL de la función, y las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son las ASINTOTAS VERTICALES de la función.



Hasta ahora vemos que hay dos tipos de asíntotas: verticales y horizontales. Pero puede suceder también que una recta asíntota tenga una cierta inclinación, se llama ASINTOTA OBLICUA.



En esta función, cuando x crece o decrece indefinidamente (es decir, cuando $x \to \pm\infty$), la función se acerca cada vez más a la recta $y = x$. Además cuando y crece o decrece indefinidamente, la función se acerca cada vez más a las rectas verticales $x = 1$ y $x = -1$.
Por lo tanto, la recta $y = x$ es la ASINTOTA OBLICUA de la función, y las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son las ASINTOTAS VERTICALES de la función.

- **<u>Cálculo de las Asíntotas</u>**

Veamos cómo hallar una recta asíntota de manera analítica.

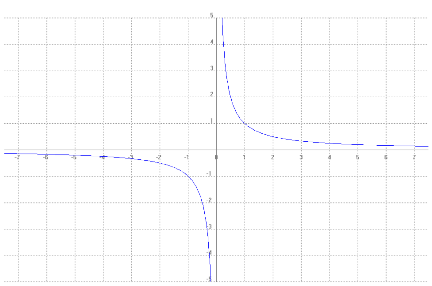
<u>Asíntota Vertical (A.V.)</u>

Una recta $x = c$ es A.V. de la función $f(x)$ si $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$.

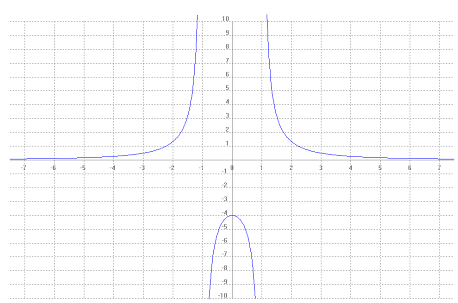
En general, las asíntotas verticales, son los puntos donde la función posee una discontinuidad esencial de salto infinito. En las funciones racionales, generalmente, son aquellos puntos en los que el denominador se anula, es decir, son puntos que no pertenecen al dominio.

Ejemplos:

Las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$ y $h(x) = \dfrac{5x}{2x - 3}$ tienen como asíntotas verticales a:



$f(x) = \dfrac{1}{x}$ ➔ la recta $\boxed{x = 0}$



$g(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$ ➔ las rectas $\boxed{x = 1}$ y $\boxed{x = -1}$

$$h(x)=\frac{5x}{2x-3} \Rightarrow \text{ la recta } \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

Asíntota Horizontal (A.H.)

Una recta $y=d$ es A.H. de la función $f(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=d$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=d$.

Ejemplos:

En las funciones anteriores, las asíntotas horizontales son:

De $f(x)=\frac{1}{x}$ ➔ la recta $\boxed{y=0}$ pues $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}=0$

De $g(x)=\frac{4}{x^2-1}$ ➔ la recta $\boxed{y=0}$ pues $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2-1}=0$

De $h(x)=\frac{5x}{2x-3}$ ➔ la recta $\boxed{y=\frac{5}{2}}$ pues $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{2x-3}=\frac{5}{2}$

Asíntota Oblicua (A.O.)

Una recta $y=ax+b$ es A.O. de la función $f(x)$ si $a=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$; y ; $b=\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-ax]$.

Ejemplo: sea $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+3}$

Esta función vemos que tiene una asíntota vertical en $x=-3$. Hallemos ahora la asíntota oblicua. Primero calculemos la pendiente a:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x(x+3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{(x+3)}=2$$

Luego, la pendiente de la A.O. es 2. Veamos ahora cuánto vale la ordenada al origen b:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2}{x+3}-2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2-2x^2-6x}{x+3}\right]=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-6x}{x+3}\right]=-6$$

Luego, la A.O. es la recta $\boxed{y=2x-6}$.

A continuación se grafican la función y su recta asíntota oblicua.