TRABAJO PRÁCTICO Nº 8: DERIVACIÓN
ASIGNATURA: MATEMÁTICA I (LIC. EN ECONOMÍA) – AÑO: 2016

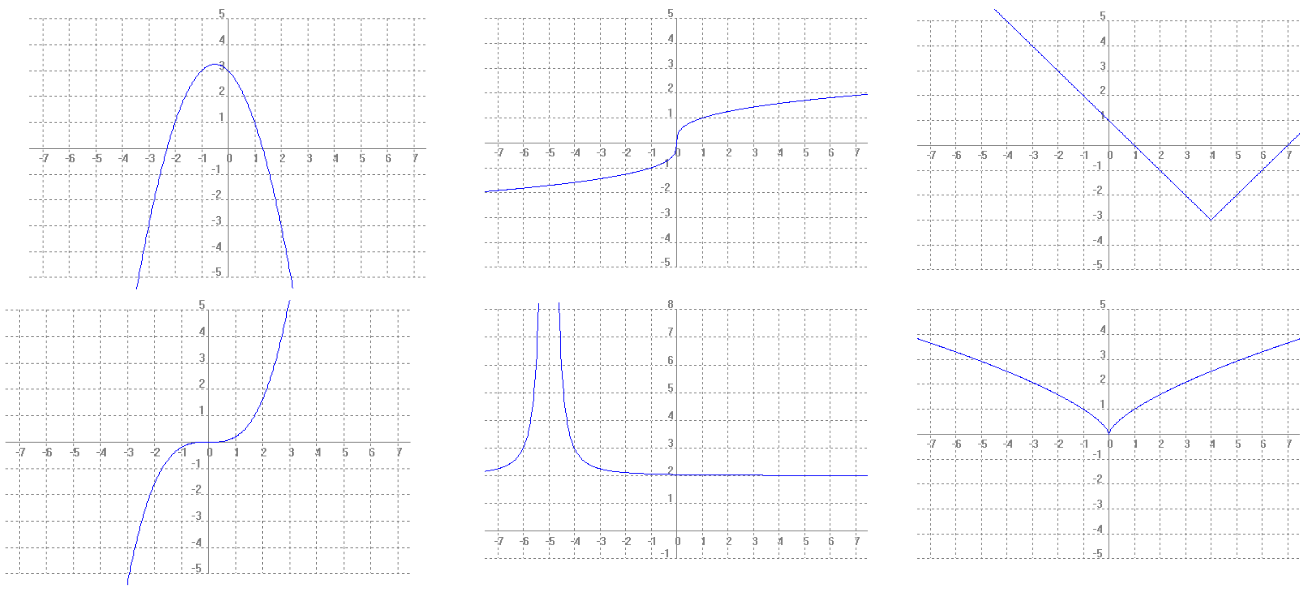
- **Concepto de derivada – Derivada por definición**

1) Hallar a partir de la definición de derivada de una función en un punto:

a) $f'(-1) \quad si \quad f(x) = 3x+4$ b) $f'(9) \quad si \quad f(x) = \sqrt{x}$

c) $f'(1) \quad si \quad f(x) = x^2$ d) $f'(3) \quad si \quad f(x) = \frac{1}{x}$

2) Indicar los puntos en los cuales piensa que las siguientes funciones no son derivables. Justificar.



3) Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Graficar.

a) $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x<1 \\ 4x-x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x \geq 2 \\ 3x-1 & si \quad x<2 \end{cases}$ c) $m(x) = \begin{cases} 3x^2+x & si \quad x \leq 0 \\ 5x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$

- **Álgebra de derivadas**

4) Derivar las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación:

a) $f(x) = x^4+3x-5$ b) $f(x) = 2\ln x - 3senx$ c) $f(x) = x \cdot senx$ d) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}$

e) $f(x) = \frac{2x}{\cos x}$ f) $f(x) = x\sqrt{x}-5$ g) $f(x) = \frac{4\ln x}{\cos x}$ h) $f(x) = (x^4+5)^6$

i) $f(x) = sen(\ln x)$ j) $f(x) = \sqrt{9-3x^7}$ k) $f(x) = sen\sqrt{3x^2-5}$ l) $f(x) = \cos^3\left(x^2\right)$

m) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ n) $f(x) = \sqrt[3]{sen(3x)}$ o) $f(x) = e^{\cos x^2}$ p) $f(x) = e^{\cos^2 x}$

5) Hallar las derivadas sucesivas de las siguientes funciones:

a) $f^{vi} \quad si \quad f(x) = x^7$ b) $f'' \quad si \quad f(x) = xe^x$

c) $f^{v} \quad si \quad f(x) = \ln x$ d) $f^{iv} \quad si \quad f(x) = sen(x)$

6) Hallar los siguientes límites utilizando la regla de L'Hopital:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} =$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen5x}{3x} =$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx - e^x + 1}{x^2} =$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} =$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)} =$ f) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x =$ g) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) =$

7) *Derivación Implícita.* Derivar las siguientes curvas dadas en forma implícita:

a) $2x^2y + 4xy^2 = 5$ b) $3x^2 - 6xy + 10y^2 - 6x^3y^5 + 6 = 0$ c) $x - y = \ln(x) + \ln(y)$

d) $x \cdot e^y + y = 5$ e) $\ln(3xy^2) - (x-y)^3 = 0$ f) $sen(x+y) + \cos(x \cdot y) = 1$

8) *Derivación Logarítmica*.

a) $f(x) = (5x^2+4)^{(2x-1)}$ b) $g(x) = sen(x)^{\cos(x)}$ c) $h(x) = x^x$ d) $p(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^{\ln(x)}$

- **Rectas tangente y normal a una curva**

9) Hallar los puntos en los que la recta tangente a f es horizontal:

a) $f(x) = -x^2 + 3$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2$ c) $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$

10) Hallar las rectas tangente y normal a las siguientes funciones en los puntos indicados. Graficar la función y las rectas en cada caso:

a) $f(x) = x^2 + 1$ en a = 2 b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en a = 1 c) $f(x) = e^x$ en a = 0

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - 5x + 6$, que sea paralela a la recta $3x + y = 2$. Graficar las tres funciones.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x}$, que sea paralela a la recta $4y - x - 4 = 0$. Graficar las tres funciones.

c) Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $h(x) = e^{3x^2-3}$ en el punto de abscisa –1. Con un programa adecuado, hacer las gráficas de la curva y la recta.

d) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $m(x) = \frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de las abcisas. Graficar la función y la recta.

- **Estudio de funciones**

11) Hacer el estudio completo de las siguientes funciones. Indicar dominio, raíces, paridad, discontinuidades, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, asíntotas. Graficar.

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$ b) $f(x) = x^4 - 8x^3$ c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ e) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ f) $f(x) = x.e^x$

g) $f(x) = \frac{2x}{(3x-1)^3}$ h) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ i) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

j) $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ k) $t(x) = x \cdot \ln(x)$

- **Funciones Marginales - Elasticidad**

12) a) Si C(t) es el costo de extraer t toneladas de mineral de una mina de cobre, ¿qué significa C'(2000)=100?
b) Si P(t) es la cantidad de millones de habitantes de la Argentina t años después de 1980, ¿qué significa P'(16)= 2?
c) Si f(p) es la demanda de cierto artículo cuando el precio es \$p, ¿qué significan las igualdades f(150)=2000 y f'(150)= – 25?
d) Si I(x) representa el ingreso en miles de pesos de una agencia de turismo cuando gasta x miles de pesos en publicidad, ¿cuál desea la agencia que sea el signo de I'? ¿Qué significa I'(100)= 2?

13) Dadas las siguientes funciones de costo, determinar el costo medio y marginal para los valores de x indicados e interpretar los resultados.

a) $C(x) = 0.01x^2 + 10x + 1000$ $x = 50$ $x = 70$

b) $C(x) = 3\sqrt{5x} + 4$ $x = 1$ $x = 12$

14) Dadas las siguientes ecuaciones de demanda determinar:

i. Valores que pueden tomar el precio y la cantidad.
ii. El ingreso total, en función de la cantidad.
iii. El ingreso medio y marginal. Interpretar estas funciones.

a) $x = 520 - 13p$ b) $x = \dfrac{3}{1 + 2p^2}$ c) $p = 10x - 5/4$ d) $x = 48 - 4p^2$

15) Dadas las siguientes funciones de demanda: hallar su elasticidad con respecto al precio indicado, interpretar el resultado y determinar si la demanda es elástica, inelástica o unitaria.

a) $q = \dfrac{500}{p+2}$ $p = 100$ b) $q = 150 - e^{p/100}$ $p = 100$

c) $p = \sqrt{2500 - q}$ $q = 900$ d) $q = \dfrac{200}{6000 + 10p^2}$ $p = 20$

16) Para las siguientes funciones de demanda, hallar:

i) La elasticidad de la demanda con respecto al precio.
ii) Los intervalos del dominio de la función demanda para los cuales la elasticidad es inelástica, elástica y unitaria.

a) $D(p) = 200 \cdot e^{-0,3p}$ b) $D(p) = 25\sqrt{400 - 8p}$

- **Problemas de optimización**

17) Si la función de demanda para un monopolista es $D(q) = 400 \cdot e^{-0.02q}$, ¿cuál es su ingreso máximo?

18) El costo por hora de operación de los camiones de una empresa está dado por la función: $C(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 20$, con $0 \leq v \leq 100$ donde v representa la velocidad en km/h. ¿A qué velocidad es mínimo el costo por hora?

19) El costo de un producto para el monopolista que lo fabrica y vende está dado por la función $C(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{15}{2}x^2+80x+30$ y su función de demanda es $D(x)=200-3x$, donde x es la cantidad de artículos. ¿Cuál es el nivel de producción que le rinde el mayor beneficio?

20) Una empresa tiene para uno de sus productos, un costo fijo de $500 y un costo variable de $2\cdot(0{,}1x+2)$ por unidad. Su función de demanda es $p(x)=800-2x$ ¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio?

21) La función de demanda de una empresa de turismo es $p(x)=5-0{,}002x$ y su función de costo medio es $C_{MEDIO}(x)=\frac{3}{x}+1{,}10$. Determinar el nivel de producción que:

a) Maximice los ingresos totales.
b) Minimice los costos marginales.
c) Maximice los beneficios.

22) La cotización de las sesiones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C(x) = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$
i) Determinar las cotizaciones máximas y mínimas, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último. ii) Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

23) Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora, viene dado por: $r=300t\cdot(1-t)$ donde $0 < t < 1$ es el tiempo en hs. Hallar: a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento? b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo? c) ¿Cuándo se obtiene el mayor rendim. y cuál es?

24) Una empresa de cable tiene actualmente 100000 suscriptores que pagan una cuota mensual de 40$. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada 0,25$ de disminución de la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?