APUNTE: CONCEPTO DE DERIVADA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economia
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 1ero
Año: 2016

- **Introducción al concepto de derivada de una función en un punto**

Incremento de x e incremento de la función

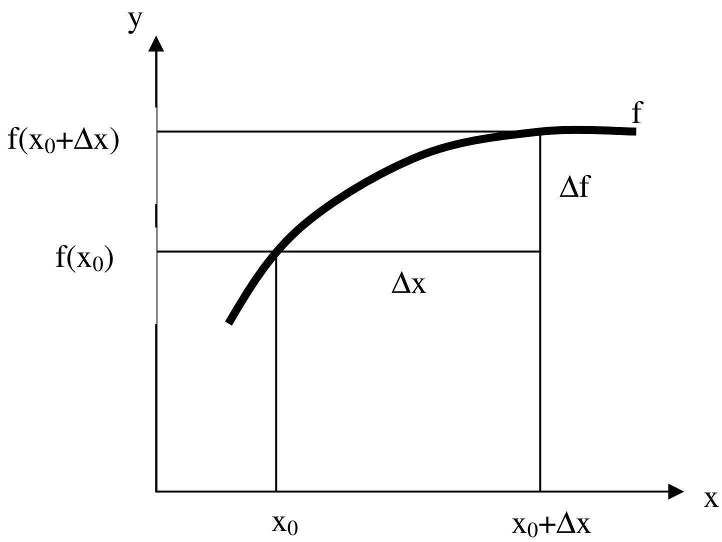
Sea f una función y sea $x = x_0$ un punto. Supongamos que la función está definida en x_0, y en todos los puntos cercanos a él, menores y mayores que x_0. En otras palabras, la función está definida en x_0, y también a la derecha y a la izquierda de x_0.

Ahora tomemos un valor cercano a x_0, mayor o menor que él. Lo llamaremos x, y a la diferencia entre x_0 y x la llamaremos Δx. Por lo tanto: $\boxed{\Delta x = x - x_0}$. Esta variación de x se denomina **incremento de x**. Puede ser positiva o negativa.

Sea $f(x_0)$ la imagen de x_0, y $f(x)$ la imagen de x. A la variación de las imágenes, es decir, de la función la llamaremos **incremento de la función o incremento de** f y se denota: $\boxed{\Delta f = f(x) - f(x_0)}$.

Como $\Delta x = x - x_0$ entonces $x = x_0 + \Delta x$.
Entonces podemos escribir que: $\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$.

Veamos gráficamente lo que hemos explicado hasta aquí:



Ejemplo: Sea $\boxed{f(x) = x^2 - 3x + 4}$ y sea $\boxed{x_0 = 2}$.

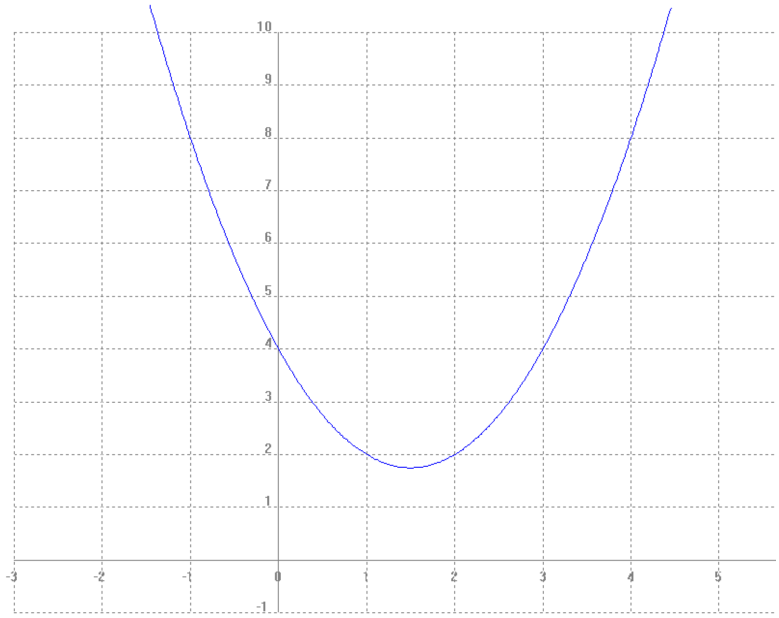
Sea el incremento de x dos, es decir, $\boxed{\Delta x = 2}$. Entonces $x = x_0 + \Delta x \rightarrow x = 2 + 2 \rightarrow \boxed{x = 4}$.

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow \Delta f = f(4) - f(2) = 8 - 2 = 6$. Luego $\boxed{\Delta f = 6}$

Significa que, para la función dada, si aumentamos en dos unidades el valor de x a partir de $x_0 = 2$, la función aumentará su valor en seis unidades.

Aquí tenemos el gráfico de la función.

Indica en el mismo quiénes son Δx y Δf para el ejemplo anterior.



Cociente incremental

Ahora vamos a considerar la razón entre las variaciones de x y de la función, es decir, vamos a analizar el cociente entre los incrementos Δf y Δx.

Se cumple que: $\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$

Este cociente se llama cociente incremental.

Para el ejemplo anterior, el cociente incremental es: $\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{6}{2} = 3}$

Límite del cociente incremental

Siguiendo con nuestro ejemplo, vamos a ir tomando incrementos de x cada vez más pequeños, y vamos a analizar qué sucede.

Seguimos estudiando la misma función $\boxed{f(x) = x^2 - 3x + 4}$ en el punto $\boxed{x_0 = 2}$.

Habíamos tomado un $\boxed{\Delta x = 2}$ lo que nos llevó a un $\boxed{\Delta f = 6} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3}$

La siguiente tabla nos muestra el valor del incremento de la función y del cociente incremental a medida que el incremento de x disminuye, es decir, a medida que el incremento de x tiende a cero.

Δx	Δf	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
$\Delta x = 1{,}5$	$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(2+1{,}5) - f(2) = 6{,}25 - 2 = 4{,}25$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{4{,}25}{1{,}5} = 2{,}833$
$\Delta x = 1$	$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(2+1) - f(2) = 4 - 2 = 2$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2}{1} = 2$
$\Delta x = 0{,}5$	$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(2+0{,}5) - f(2) = 2{,}75 - 2 = 0{,}75$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0{,}75}{0{,}5} = 1{,}5$
$\Delta x = 0{,}3$	$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(2+0{,}3) - f(2) = 2{,}39 - 2 = 0{,}39$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0{,}39}{0{,}3} = 1{,}3$
$\Delta x = 0{,}1$	$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(2+0{,}1) - f(2) = 2{,}11 - 2 = 0{,}11$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0{,}11}{0{,}1} = 1{,}1$
$\Delta x = 0{,}01$	$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ $= f(2+0{,}01) - f(2) = 2{,}0101 - 2 = 0{,}0101$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0{,}0101}{0{,}01} = 1{,}01$

Vemos que: $\boxed{\text{a medida que } \Delta x \to 0 \text{ se cumple que } \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 1}$ Es decir: $\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 1}$

Veamos que esto es cierto. Para eso vamos a calcular el límite de la forma que conocemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 3(2+\Delta x) + 4 - \left(2^2 - 3\cdot 2 + 4\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 6 - 3\cdot\Delta x + 4 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\cdot\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(4 + \Delta x - 3\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x + 1\right) = \boxed{1}$$

<u>Derivada de una función en un punto</u>

Ya podemos definir la derivada de una función en un punto.

> Se llama **derivada de una función** f **en un punto** $x = x_0$, y se denota $f'(x_0)$, al valor (si existe) del limite del cociente incremental en ese punto cuando el incremento de x tiende a cero.

Es decir:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} \qquad (1)$$

Entonces, para el ejemplo anterior podemos afirmar que la derivada de la función $\boxed{f(x) = x^2 - 3x + 4}$ en el punto $\boxed{x_0 = 2}$ es igual a uno. O sea: $\boxed{f'(2) = 1}$.

<u>Forma alternativa de la derivada de una función en un punto</u>

Como vimos antes, los incrementos de x y de la función son iguales a: $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ y $\Delta x = x - x_0$.

Teniendo en cuenta que si $\Delta x \to 0$ significa que $x \to x_0$, la definición (1) nos queda:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (2)$$

<u>Otro ejemplo resuelto</u>

Vamos a hallar la derivada de la función $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$ en el punto $\boxed{x_0 = 9}$.

Aplicamos la definición (2):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ➔ \quad f'(9) = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9}$$

Este es un límite indeterminado $\left(\frac{0}{0}\right)$. Para salvar la indeterminación debemos multiplicar por el conjugado del numerador.

Entonces: $$f'(9) = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{9}\right)\cdot\left(\sqrt{x} + \sqrt{9}\right)}{(x-9)\cdot\left(\sqrt{x} + \sqrt{9}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{9}\right)^2}{(x-9)\cdot\left(\sqrt{x} + \sqrt{9}\right)} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)\cdot\left(\sqrt{x} + \sqrt{9}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{9}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

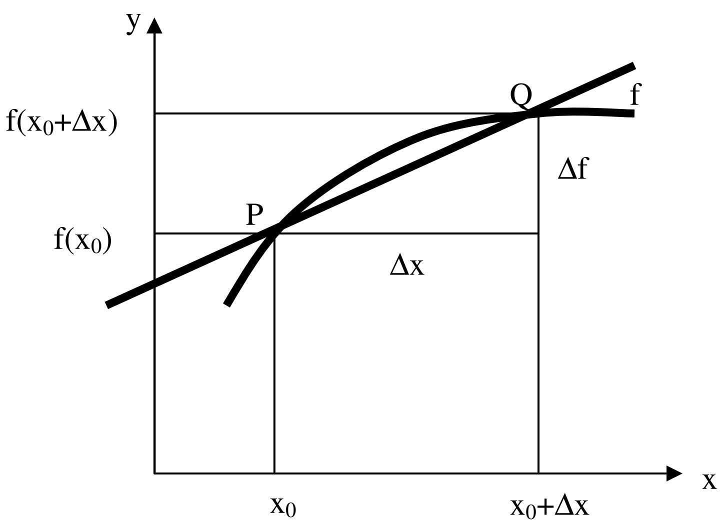
Por lo tanto, la derivada de la función $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$ en el punto $\boxed{x_0 = 9}$ es $\boxed{\frac{1}{6}}$. Es decir: $\boxed{f'(9) = \frac{1}{6}}$

<u>Interpretación geométrica de la derivada</u>

Volvamos al gráfico de la primer página de este apunte.
Llamemos:

$$P = \left(x_0 ; f(x_0)\right) \; ; \; Q = \left(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)\right)$$

Unamos estos dos puntos mediante una recta.



Vemos que la pendiente de esta recta es igual al cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Si tomamos valores de Δx cada vez más pequeños, y en cada caso graficamos el valor de Δf y Δx, y trazamos la recta que une P con el nuevo punto Q obtenido, vemos que Q se aproxima cada vez más a P.

Entonces, el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ será la **<u>pendiente de la recta tangente</u>** a la curva de la función en el punto P.

Por lo tanto:

El valor de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

En el ejemplo anterior, obtuvimos que la derivada de la función $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$ en el punto $\boxed{x_0=9}$ es $\boxed{\dfrac{1}{6}}$. Es decir: $\boxed{f'(9)=\dfrac{1}{6}}$. Es decir que si trazamos una recta tangente a esta función que pase por el punto de abcisa $\boxed{x_0=9}$, esta recta tendrá pendiente igual a $\dfrac{1}{6}$.

Recordando que la ecuación de una recta dados un punto y su pendiente es: $\boxed{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$, podemos obtener la ecuación de la recta tangente.

$$y-y_0=m\cdot(x-x_0) \Rightarrow y-3=\frac{1}{6}\cdot(x-9) \Rightarrow y=\frac{1}{6}\cdot x-\frac{9}{6}+3 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{6}\cdot x+\frac{3}{2}}$$

A continuación, el gráfico de la función $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$ y la recta tangente a esta función en el punto $x_0=9$ que es $\boxed{y=\dfrac{1}{6}\cdot x+\dfrac{3}{2}}$.