Introducción a las SUCESIONES y a las SERIES NUMERICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economía
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 1ero
Año: 2016

Sucesiones Numéricas

➢ **Definición**

Una **sucesión** $a_1, a_2, a_3, ...$ es una "lista infinita" de números reales. Los subíndices 1, 2, 3, … nos indican el lugar o la posición que ocupa el correspondiente número en la lista.

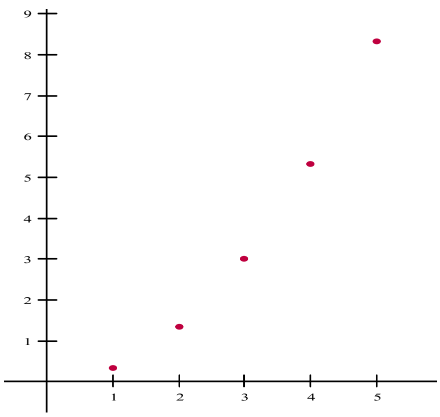
Formalmente, una sucesión se define de la siguiente manera:

Una **sucesión** $a(n)$ o a_n es una **función** cuyo dominio son los números naturales y cuyo codominio son los números reales. Los números que forman la sucesión, es decir, $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, $a(3) = a_3$, … se llaman los **términos** de la sucesión.

Por ejemplo: $\boxed{a(n): N \to R \;/\; a(n) = \frac{n^2}{3}}$ es una sucesión tal que a cada número natural le asigna el cuadrado de este número natural dividido por tres. Por lo tanto: $1 \to \frac{1}{3}$; $2 \to \frac{4}{3}$; $3 \to 3$; $4 \to \frac{16}{3}$; $5 \to \frac{25}{3}$; …

Podemos armar la siguiente tabla y luego graficar la sucesión:

n	*a(n)*
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{4}{3}$
3	3
4	$\frac{16}{3}$
5	$\frac{25}{3}$



➢ **Formas de expresar una sucesión**

Para indicar una sucesión podemos hacerlo de dos maneras: **por comprensión** o **por extensión**:

Por ejemplo la sucesión: $\boxed{a(n)=\dfrac{n}{n+1}}$, está dada por comprensión. Esta "fórmula" nos indica la regla para hallar todos los elementos de la sucesión. Se le llama **el término general** de la sucesión.

Pero si escribimos los primeros términos: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$ la estamos indicando por extensión ya que:

Cuando $n=1$ se cumple que $a(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Cuando $n=2$ se cumple que $a(2)=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$

Cuando $n=3$ se cumple que $a(3)=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$

Ejercicio 1: *dadas las sucesiones* $\boxed{a(n)=\dfrac{2n}{n^2+1}}$, $\boxed{b(n)=n(n+1)}$ *y* $\boxed{c(n)=(-1)^n n(n+1)}$ *expresarlas por extensión.*

Ejercicio 2: *dadas las sucesiones* $\boxed{1,4,9,16,25,\cdots}$ *y* $\boxed{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots}$ *expresarlas por comprensión.*

Algunas sucesiones requieren de dos "fórmulas" para su definición.

Por ejemplo: $\begin{cases} a(2n)=5n \\ a(2n-1)=\dfrac{n^2}{n+1} \end{cases}$

Esta sucesión, escrita por extensión, es la siguiente:

$n=1\Rightarrow \begin{cases} a_1=\dfrac{1^2}{1+1}=\dfrac{1}{2} \\ a_2=5\cdot 1=5 \end{cases}$ $\qquad$ $n=2\Rightarrow \begin{cases} a_3=\dfrac{2^2}{2+1}=\dfrac{4}{3} \\ a_4=5\cdot 2=10 \end{cases}$

Ejercicio 3: *hallar los términos siguientes de esta sucesión:*

$n=3\Rightarrow \begin{cases} a_5= \\ \\ a_6= \end{cases}$ $\qquad$ $n=4\Rightarrow \begin{cases} a_7= \\ \\ a_8= \end{cases}$

Por lo tanto, la sucesión es la siguiente: $\frac{1}{2}$, 5 , $\frac{4}{3}$, 10 , ...

Algunas sucesiones se definen **por recurrencia**, es decir, necesitan de sus términos anteriores para hallar los términos siguientes. Por ejemplo, la llamada **sucesión de Fibonacci** que se define como:

$$\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \qquad \forall n\geq 2 \end{cases}$$

Sus primeros términos son: $a_1 = a_2 = 1$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + a_1 = 2$$
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + a_2 = 3$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + a_3 = 5$$
$$n = 5 \Rightarrow a_6 = a_5 + a_4 = 8$$

- **Sucesiones monótonas**

Una sucesión es **monótona creciente** si cada término es menor o igual que el siguiente. Es decir: $a_n \le a_{n+1}$. Significa que los términos van aumentando su valor o, a lo sumo, son iguales.
Una sucesión es **monótona decreciente** si cada término es mayor o igual que el siguiente. Es decir: $a_n \ge a_{n+1}$. Significa que los términos van disminuyendo su valor o, a lo sumo, son iguales.

Ejemplos:

La sucesión $a(n) = \dfrac{n^2 + 2}{n}$ cuyos primeros términos son

Cuando $n = 1$ se cumple que $a(1) = \dfrac{1+2}{1} = 3$

Cuando $n = 2$ se cumple que $a(2) = \dfrac{4+2}{2} = 3$

Cuando $n = 3$ se cumple que $a(3) = \dfrac{9+2}{3} = \dfrac{11}{3} = 3{,}666$

Cuando $n = 4$ se cumple que $a(4) = \dfrac{16+2}{4} = \dfrac{18}{4} = 4{,}5$

es **monótona creciente**.

La sucesión $b(n) = \dfrac{n+1}{n^3}$ cuyos primeros términos son

Cuando $n = 1$ se cumple que $b(1) = \dfrac{1+1}{1} = 2$

Cuando $n = 2$ se cumple que $b(2) = \dfrac{2+1}{8} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$

Cuando $n = 3$ se cumple que $b(3) = \dfrac{3+1}{27} = \dfrac{4}{27} = 0{,}148$

Cuando $n = 4$ se cumple que $b(4) = \dfrac{4+1}{64} = \dfrac{5}{64} = 0{,}078$

es **monótona decreciente**.

- **Sucesiones acotadas**

Una sucesión es **acotada superiormente** si existe un número real llamado **COTA SUPERIOR** tal que es mayor o igual que todos los términos de la sucesión.
Una sucesión es **acotada inferiormente** si existe un número real llamado **COTA INFERIOR** tal que es menor o igual que todos los términos de la sucesión.
Una sucesión es **acotada** si es acotada superior e inferiormente a la vez.

Ejemplos:

La sucesión del ejemplo anterior $a(n)=\dfrac{n^2+2}{n}$ es acotada inferiormente, ya que todos sus términos son mayores o iguales que 3. Por lo tanto el intervalo $(-\infty\,;3]$ es el conjunto de todas las cotas inferiores.

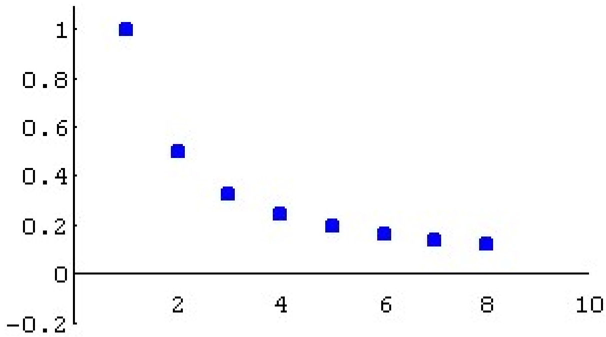
La sucesión del ejemplo anterior $b(n)=\dfrac{n+1}{n^3}$ es acotada superiormente, ya que todos sus términos son menores o iguales que 2. Por lo tanto el intervalo $[2\,;+\infty)$ es el conjunto de todas las cotas superiores.

- **Comportamiento de las sucesiones**

- **Límite de una sucesión**

Consideremos la sucesión $a(n)=\dfrac{1}{n}$. Escribamos algunos de los valores que toma esta sucesión:

n	a(n)
1	1
2	0,5
3	0,333
4	0,25
5	0,2
…	
10	0,1
100	0,01
100000	0,00001



Vemos que a medida que n aumenta el valor de a(n) se acerca cada vez más a cero.
Dicho con otras palabras: cuando n tiende a infinito, los términos de la sucesión a(n) tienden a cero, aunque nunca tomarán ese valor. El valor "cero" es el **límite** de esta sucesión.
Podemos escribir entonces que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0}$$

Una sucesión que tiene límite finito se dice **convergente**. Si el límite es infinito la sucesión es **divergente** y si el límite no existe diremos que la sucesión es **oscilante**.

Ejemplos:

1)La sucesión $b(n)=n^2+3$ es divergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} b(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+3\right) = \infty$

2) La sucesión $c(n)=(-1)^n$ es oscilante pues $\lim\limits_{n\to\infty} c(n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe, ya que la sucesión toma los valores (-1) y 1 según n sea impar o par.

- **Cálculo de límites de sucesiones**

Los límites de una sucesión pueden calcularse de la manera en que hemos calculado límites para x tendiendo a infinito.

Por ejemplo: calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n+1}{3n^2+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{5n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{7}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Ejercicio 4: *Calcular los límites de las siguientes sucesiones*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+4}$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$ *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ *e)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+4n+10}{2n^3+7}$ *f)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n}{2n+1}$

➢ Un teorema importante

La siguiente propiedad nos permite averiguar si una sucesión es convergente, es decir, si tiene límite finito.

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Por ejemplo:

1) La sucesión $a(n)=\dfrac{1}{n}$ está acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0. Además, es monótona decreciente. Por lo tanto es convergente.

2) La sucesión $b(n)=(-1)^n$ está acotada entre (-1) y 1, pero no es monótona. Luego, no podemos aplicar la propiedad.

3) La sucesión $c(n)=n^2+3$ es monótona creciente, pero no es acotada. Luego, tampoco podemos aplicar la propiedad.

Ejercicio 5: *Aplicar, si es posible, la propiedad anterior para saber si las siguientes sucesiones son convergentes.*

a) $a(n)=(-1)^n\dfrac{1}{n}$ *b)* $b(n)=\dfrac{n+1}{n+3}$ *c)* $c(n)=n!$

➢ Una sucesión importante

La sucesión $a(n)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente y acotada.

Por lo tanto es convergente. Su límite es el número $e=2{,}7182...$

Es decir que: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Ejercicio 6: *Comprobar, dando valores a* n *que la sucesión anterior es monótona creciente, acotada y que converge al número* e. *Calcula* a_{100}, a_{250}, a_{1500}, *y* a_{9000}.

Ejercicio 7: *Se deja caer una pelota desde una altura de 2 metros y después de cada rebote, la altura se reduce a la mitad de la anterior. Escribir la sucesión de las alturas alcanzadas, su término general, razonar si crece o decrece y su tendencia (límite).*

Series Numéricas

➢ Definición

Si $a(n) = a_n$ es una sucesión numérica, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se llama **SERIE INFINITA** o simplemente **SERIE**. Los números a_i son los **términos** de la serie. Suele escribirse simplemente $\sum a_n$.

Por lo tanto, **una serie es la suma de los términos de una sucesión**.

➢ Series convergentes y divergentes

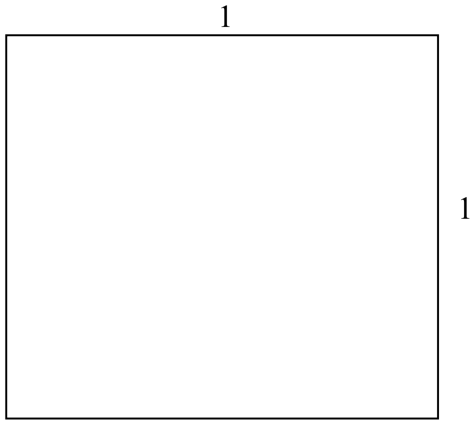
La suma de la serie puede ser un valor **finito** o **infinito**. En caso de ser finito, se dice que la serie es **convergente**. En cambio, si la suma es infinita, la serie es **divergente**.

Ejemplos:

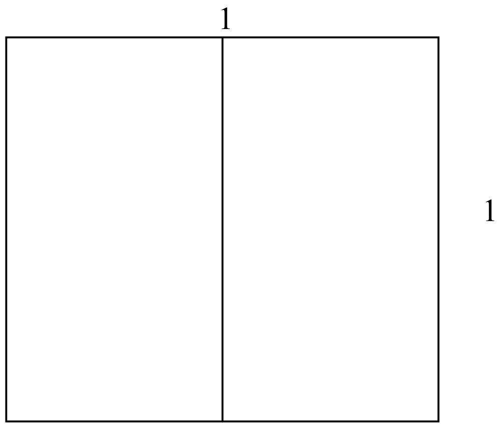
a) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$ Su suma es infinita (observar que cuantos más términos sumemos, mayor da la suma). Por lo tanto, esta serie es divergente.

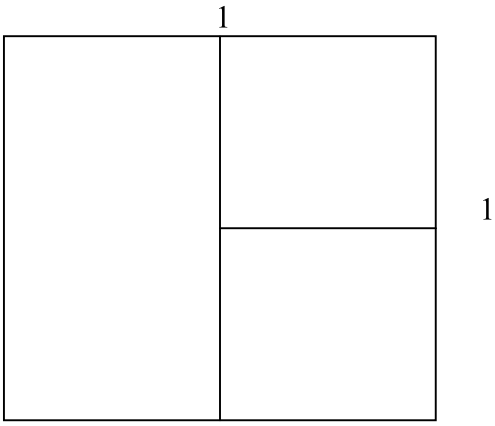
b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ es una serie convergente. Su suma es 1 (uno). Vamos a probarlo.

Consideremos el cuadrado de lado 1. Luego, su área es 1. ➔ $\boxed{A = 1}$

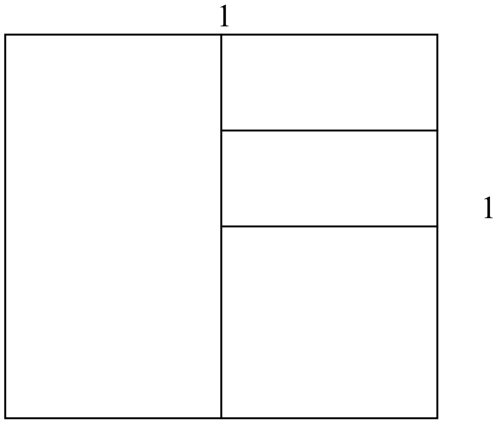


Dividimos el cuadrado en dos partes iguales, luego el área será: $\boxed{A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$





Una de las mitades la volvemos a dividir por la mitad. Entonces podemos escribir que el área es: $\boxed{A=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$



Repitiendo el proceso, obtenemos: $\boxed{A=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}$

Si seguimos repitiendo el proceso, obtendremos:

$$\boxed{A=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots}$$

Y sabemos que esta suma infinita nos da uno, que es el área del cuadrado inicial. Luego, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

- **<u>La serie armónica</u>**

> La serie armónica es la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$.Esta serie es divergente.

Para saber si una serie es convergente o divergente, o en caso de ser convergente, cuál es su suma, existen diversos métodos, según la forma que tenga la serie. Vamos a analizar solamente un tipo de series muy utilizadas, llamadas **<u>series geométricas</u>**.

- **<u>Series geométricas</u>**

> Una **<u>serie geométrica de razón *r*</u>** es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot r^n=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^n+\ldots$
>
> con $a\in R$ y $a\neq 0$.

Ejemplos:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}3\cdot 2^n$ es una serie geométrica de razón $r=2$ y $a=3$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $r=\frac{1}{2}$ y $a=3$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $r=\frac{5}{2}$ y $a=1$.

- **<u>Convergencia de una serie geométrica</u>**

> Una serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot r^n$ de razón r diverge si $|r|\geq 1$.
>
> Si $0<|r|<1$ entonces la serie converge y su suma es: $S=\frac{a}{1-r}$ con $0<|r|<1$

En los ejemplos anteriores:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot 2^n$ es divergente pues $r = 2 > 1$. Su suma es infinita.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente pues $r = \frac{1}{2} < 1$. Su suma es $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$ es divergente pues $r = \frac{5}{2} > 1$. Su suma es infinita.

Ejercicio 8: analizar si las siguientes series geométricas convergen o divergen. En caso de convergencia, hallar su suma.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot 5^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}01^n$

Ejercicio 9: hallar la distancia recorrida por la pelota del Ejercicio 7.

- **Una aplicación de las series geométricas**

Es conocida la fórmula que nos indica cómo expresar un número decimal periódico en forma de fracción. Por ejemplo, el número 0,77777… es igual a 7/9, el número 0,25252525… es igual a 25/99. Las series geométricas nos proporcionan una forma de demostrar que esto es cierto. Veamos un ejemplo:

Sea el número 0,77777…

Podemos descomponerlo así: $0{,}77777\ldots = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + 0{,}00007 + \ldots$

Escribimos cada término como fracción: $= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000} + \ldots$

$$= \frac{7}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \ldots$$

Sacamos factor común $\frac{7}{10}$: $= \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right)$

La expresión que está entre paréntesis puede escribirse como sumatoria así: $= \frac{7}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\right)$

Que es equivalente a: $= \frac{7}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$

Introduciendo $\frac{7}{10}$ dentro de la sumatoria nos queda: $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n$

Que es una serie geométrica en la cual $a = \frac{7}{10}$ y la razón es $r = \frac{1}{10}$.

Como la razón es menor que uno, esta serie es convergente, por lo cual podemos hallar su suma.

Entonces: $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$. Luego, $\boxed{0{,}77777\ldots = \frac{7}{9}}$

Ejercicio 10: Expresar los siguientes números decimales periódicos como series geométricas, y expresar sus sumas como fracciones:

a) 0,22222..... b) 0,13131313........

TRABAJO PRACTICO: SUCESIONES Y SERIES
ASIGNATURA: MATEMATICA I (Economía) - U.N.R.N. – AÑO: 2016

1) Escriba los primeros 6 términos de la sucesión comenzando por n=1:

a) $a(n)=2n-1$ b) $b(n)=\dfrac{n+2}{2n-1}$ c) $c(n)=\dfrac{5-n}{(-1)^n+4}$ d) $d(n)=\dfrac{-2n+(-1)^n}{4}$

2) Hallar el termino general de las siguientes sucesiones:

a) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};...$ b) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}...$ c) $-1;2;-3;4;-5;...$ d) $3;-2;\frac{5}{3};-\frac{3}{2};\frac{7}{5};...$

e) 10, 7, 4, 1, … f) $1;\frac{1}{4};\frac{1}{9};\frac{1}{16};\frac{1}{25};...$ g) $\frac{2}{3};1;\frac{4}{3};\frac{5}{3};...$ h) 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; …

3) Dada las siguientes sucesiones analizar si son monótonas crecientes o decrecientes, acotadas y convergentes. Hallar los primeros términos y graficarlas.

a) $a(n)=\dfrac{1}{n}$ b) $b(n)=\dfrac{2n-5}{n+1}$ c) $c(n)=\dfrac{8+n}{4+n}$ d) $d(n)=2\cos\dfrac{n\pi}{4}$

e) $a(n)=n^2-1$ f) $a(n)=(-1)^n(n+2)$ g) $a(n)=\dfrac{n^2+1}{n}$ h) $a(n)=n^2\cdot(-1)^n$

4) Dadas las siguientes sucesiones, analizar su convergencia:

a) $s(n)=\dfrac{3n^2}{n^2-5}$ b) $s(n)=\dfrac{3n-7}{2n^3-5n^2+3}$ c) $s(n)=\dfrac{8-n^3}{5n+3}$

d) $s(n)=\left(\dfrac{n+2}{3n}\right)^2$ e) $s(n)=(-1)^n$

5) (*Sucesión de Fibonacci*) En una jaula se coloca una pareja de conejos recién nacidos. Cada pareja de conejos necesita un mes para hacerse adulta, durante el cual no se reproduce. Cada pareja origina mensualmente una nueva pareja, según la siguiente tabla:

Mes	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nro. de parejas	1	1	2	3	5							

a) Completar la tabla y obtener el término general. (Se recomienda hacer un gráfico de árbol)
b) ¿Cuántas parejas habrá después de un año y medio de comenzar la experiencia?

6) Dadas las siguientes sucesiones, encuentra los diez primeros términos, y el valor de a_{80}, a_{1215} y a_{10001}.

a) $a(n)=\begin{cases} n^2 & si\ n\ es\ par \\ -1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$ b) $a(n)=\begin{cases} n & si\ n\ es\ múltiplo\ de\ 3 \\ \dfrac{1}{n} & si\ n\ no\ es\ múltiplo\ de\ 3 \end{cases}$

7) Analizar la convergencia de las siguientes series geométricas. En cada caso, indicar el valor de la suma:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot 5^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}0{,}01^n$

8) Expresar los siguientes números decimales periódicos como series geométricas, y expresar sus sumas como fracciones: a) 0,44444..... b) 0,75757575........

9) Se deja caer una pelota desde una altura de 2 metros y después de cada rebote, la altura se reduce a la mitad de la anterior.

a) Escribir la sucesión de las alturas alcanzadas, su término general, razonar si crece o decrece y su tendencia (límite).
b) hallar la distancia recorrida por la pelota.