APUNTE TEORICO-PRACTICO: LÍMITES DE FUNCIONES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO NEGRO
Asignatura: Matemática 1
Carreras: Lic. en Economía
Profesor: Prof. Mabel Chrestia
Semestre: 1ero
Año: 2016

Introducción a los límites

Consideremos la siguiente función cuyo Dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto el 3. Es decir: $Dom = R - \{3\}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x+7 & si \quad x<3 \\ 2x-2 & si \quad x>3 \end{cases}$$

Tomemos el punto de abcisa 3. Sea entonces $x_0 = 3$. Vamos a acercarnos a este valor por derecha e izquierda, es decir, tomando valores mayores que 3 y menores que 3. De cada valor que tomamos, hallamos su imagen. Obtenemos las siguientes tablas:

x	**f(x)**
2,8	4,2
2,9	4,1
2,99	4,01
2,999	4,001
2,9999	4,0001

x	**f(x)**
3,2	4,4
3,1	4,2
3,01	4,02
3,001	4,002
3,0001	4,0002

Vemos que si nos acercamos por la derecha o por la izquierda a $x_0 = 3$ las imágenes se acercan a un único valor que es el 4. Cuanto más nos acerquemos en el eje X al 3, más nos acercaremos en el eje Y al 4. Si esto se cumple siempre, concluimos que el valor 4 es el límite de la función dada en el punto $x_0 = 3$. Es decir, L = 4. (Compara los valores de la tabla con el gráfico de la función)

Se dice entonces que **existe el límite** de la función f(x) en el punto $x_0 = 3$ y es L = 4.

Daremos entonces una primera definición de **límite de una función en un punto** de la siguiente manera:

El límite de una función f(x) en el punto x_0 es el valor L al cual se acercan las imágenes (los valores de y) cuando las preimágenes (los valores de x) se acercan (por derecha y por izquierda) al valor de x_0.

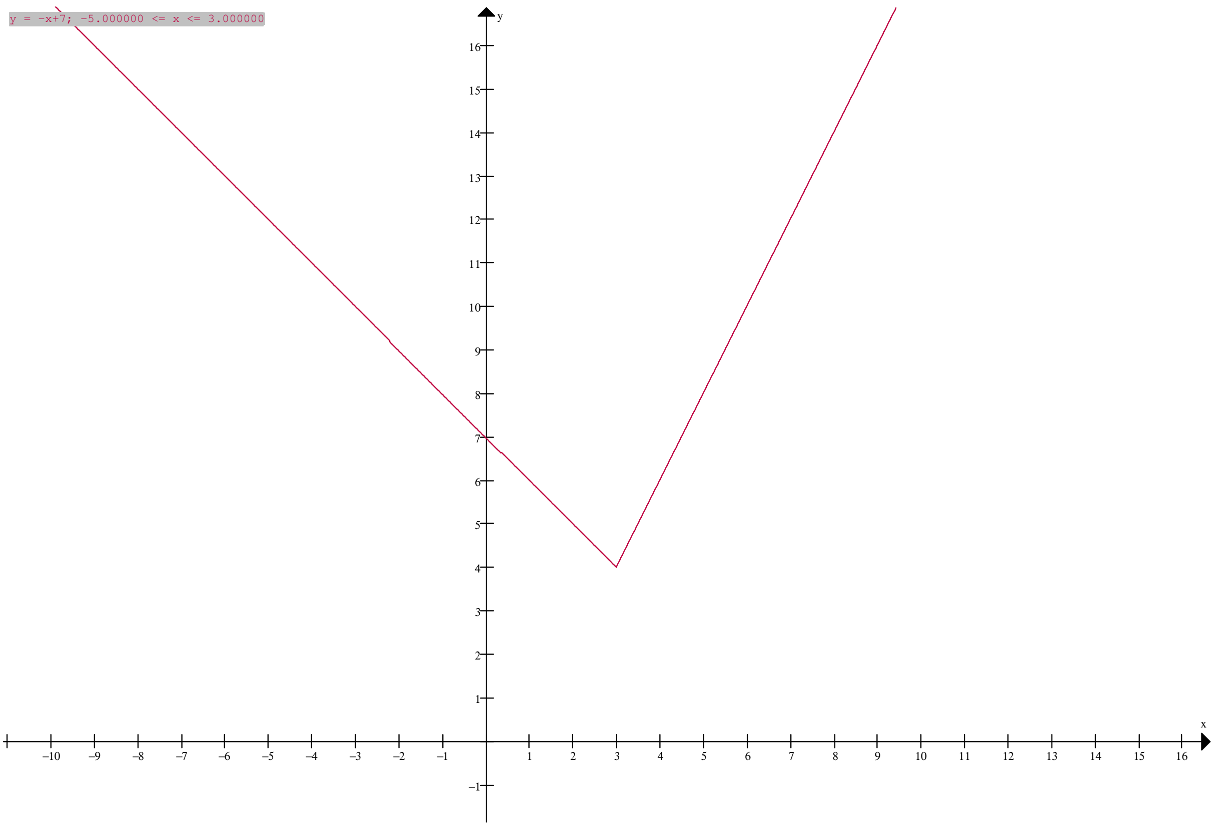
Observemos que no nos interesa qué sucede en el punto $x_0 = 3$, es decir, no importa si existe o no su imagen (es decir, si existe f(3)), y en caso de que existiera tampoco importa cuál es. Para analizar la existencia o no del límite sólo nos importa lo que sucede en las cercanías del punto $x_0 = 3$.

Por lo tanto, si las imágenes de los valores cercanos a x_0 se acercan cada vez más a un único valor L cuánto más cerca estén los valores x del valor x_0, entonces L es el **límite** de la función f(x) cuando los valores de x se acercan a x_0.

Esto se escribe así: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$

Y se lee: “ el límite de la función f(x) cuando x tiene a x_0 es L”.

A continuación se muestra la gráfica de la función que analizamos:



Ejercicio Nro. 1

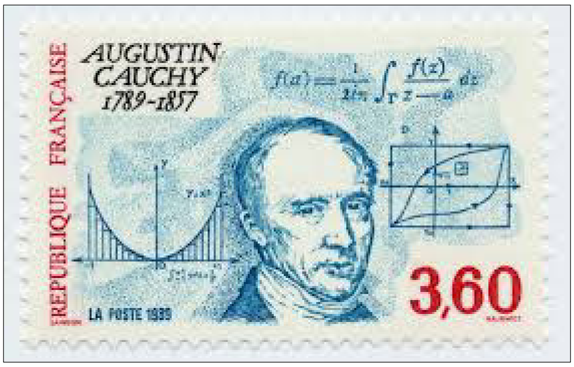
De cada una de las siguientes funciones, indica su dominio. Luego, grafica cada función.

a) $f(x) = \begin{cases} 8x & si \quad x < 0 \\ -2x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$	b) $m(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \neq 2 \\ -3 & si \quad x = 2 \end{cases}$	c) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x \leq 1 \\ 2x^2 + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$
d) $s(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & si \quad x > 5 \\ 7 & si \quad x = 5 \\ \frac{1}{5}x + 2 & si \quad x < 5 \end{cases}$	e) $h(x) = \ln(x+1)$	f) $t(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Ejercicio Nro. 2

Analiza cada función del ejercicio anterior en los siguientes puntos: a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = 2$; c) $x_0 = 1$; d) $x_0 = 5$; e) $x_0 = 1$; f) $x_0 = 0$. En cada caso, debes armar las tablas con valores menores y mayores que x_0. Debes concluir si existe el límite de la función en el punto analizado o no.

Definición rigurosa del límite



De lo visto recién podemos concluir que la definición informal de límites dice que:

Si f(x) se acerca arbitrariamente a un único número L cuando x tiende a x_0 por los dos lados, decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a x_0 es L, y se escribe:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

Esta definición es informal, ya que debemos dar un significado preciso a las dos frases siguientes:

"f(x) se acerca arbitrariamente a un único número L" y ***"x tiende a x_0"***

Es decir, debemos escribirlas de manera simbólica utilizando un lenguaje matemático riguroso. El primero en hacer esto fue Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Su definición es la que actualmente se utiliza.

Antes de enunciar la definición de Cauchy debemos conocer algunos conceptos que se utilizarán en la misma.

Conceptos previos

(I) Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número real a se define como: $\boxed{|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}}$

De esta manera, por ejemplo, $|7| = 7$ y $|-2| = -(-2) = 2$.

Las propiedades principales que verifica el valor absoluto son:

1. $|a| \geq 0, \forall a \in R.$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$
3. $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|, \forall a, b \in R.$
4. $|a| + |b| \geq |a + b|, \forall a, b \in R.$ (esta propiedad se llama Desigualdad Triangular)

Otras propiedades del valor absoluto:

5. $|-a| = |a|, \ \forall a \in R.$
6. $|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b, \ \forall a, b \in R.$
7. $|a - b| = |b - a|, \quad \forall a, b \in R.$
8. $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|, \ \forall a, b \in R, b \neq 0.$
9. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, \quad \forall a, b \in R.$
10. $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b, \quad \forall a, b \in R.$

Ejercicio Nro. 3
Elige distintos números reales y verifica todas las propiedades del valor absoluto.

Ejercicio Nro. 4
Utiliza las propiedades de valor absoluto para resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones. En el caso de las inecuaciones, escribe como intervalos las soluciones y represéntalas en la recta real.

a) $|x| = 6$ b) $|x-3| = 8$ c) $|-4| \cdot |x| = 12$ d) $|x| \le 2$ e) $|x| \ge \frac{1}{2}$ f) $|x-7| < 1$ g) $|x-10| \ge 2$

h) $|x-20| < 8$ i) $|x+30| < 10$ j) $|x-1| \ge 3$ k) $|x+6| > \frac{1}{3}$

(II) Distancia entre dos números

Consideremos dos números reales a y b distintos. Queremos hallar la distancia entre ambos números. Observemos que pueden suceder dos situaciones: a > b ó a < b.

En el primer caso, la distancia entre a y b será: $\boxed{d(a;b) = a - b}$.
En el segundo caso será: $\boxed{d(a;b) = b - a}$.

Vemos que siempre $d(a;b) > 0$.
Podemos generalizar la definición de distancia, sin importar si a > b ó a < b de la siguiente manera:

$$\boxed{d(a;b) = |a - b|}$$

Se lee "la distancia entre a y b es el valor absoluto de la diferencia entre a y b".

Observemos que en el caso particular de ser a = b la distancia será $\boxed{d(a;b) = |a-b| = |a-a| = 0}$.

La definición de distancia cumple las siguientes propiedades:

1. $d(a;b) \ge 0, \forall a,b \in R.$ *Si* $a = b$ *entonces* $d(a;b) = 0.$
2. $d(a;b) = d(b;a), \forall a,b \in R.$
3. $d(a;b) + d(b;c) \ge d(a;c), \forall a,b,c \in R.$ (Desigualdad Triangular)

Ejercicio Nro. 5
Elige tres números reales distintos (no todos positivos) y verifica que se cumplen las tres propiedades de distancia. Representa en la recta de los números reales.

(III) Entorno

Ahora veremos la definición de entorno, en la cual utilizaremos las nociones de distancia y valor absoluto vistas anteriormente.

Dados $a \in R$ y un número real $\varepsilon > 0$, llamamos **entorno** de centro a y radio ε al conjunto de los números reales cuya distancia al punto a es menor que ε.

En símbolos: $E(a;\varepsilon) = \{x \in R \,/\, d(a,x) < \varepsilon\}$

O bien (utilizando valor absoluto): $E(a;\varepsilon) = \{x \in R \,/\, |x-a| < \varepsilon\}$

Tomando esta última expresión, y aplicando la propiedad 9 de valor absoluto, tenemos que:

$$|x-a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < x - a < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$$

Esta última expresión nos permite realizar la representación gráfica en la recta real.

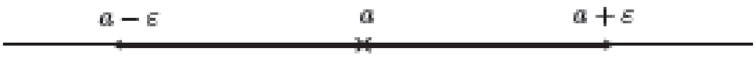
Vamos a definir a continuación entorno reducido:

Dados $a \in R$ y un número real $\varepsilon > 0$, llamamos **<u>entorno reducido</u>** de centro a y radio ε al conjunto de los números reales cuya distancia al punto a es menor que ε y distinta de cero. Es decir, se quita del conjunto de puntos al centro a.

En símbolos: $E_R(a;\varepsilon) = \{x \in R / 0 < d(a,x) < \varepsilon\}$

O bien (utilizando valor absoluto): $E_R(a;\varepsilon) = \{x \in R / 0 < |x-a| < \varepsilon\}$

Es decir, $x \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ con $x \neq a$. La representación gráfica es la siguiente:



<u>Ejercicio Nro. 6</u>
Escribe como conjunto y representa los siguientes entornos:

a) $E(3;1)$ b) $E(-4;0,25)$ c) $E(0;2,1)$ d) $E_R(5;0,4)$ e) $E_R(0,5;0,2)$ f) $E_R(0;1)$

<u>Ejercicio Nro. 7</u>
Escribe n cada caso de qué entorno se trata y represéntalo:

a) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / |x-7| < 2\}$ b) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / 0 < |x-7| < 2\}$

c) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / d(2,x) < 1\}$ d) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / d(2,x) < 1 \wedge x \neq 2\}$

e) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / -1 < x-3 < 1\}$ f) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / 9 < x < 13\}$

g) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / x \in (1;9)\}$ h) $E(\ \ ;\ \ ) = \{x \in R / x \in (-7;7)\}$

<u>Definición formal de límite</u>

Volvamos ahora a la definición informal de límite. Vamos a darle un significado matemático a cada una de las dos frases: ***"f(x) se acerca arbitrariamente a un único número L"*** y ***"x tiende a x_0".***

La frase ***"f(x) se acerca arbitrariamente a un único número L"*** nos dice que la distancia entre f(x) y L es cada vez más pequeña. O bien, que si tomamos un valor fijo positivo, la distancia entre f(x) y L será siempre menor que este valor.

Llamemos ε a este valor fijo. Entonces: $d(f(x);L) < \varepsilon$. Usando valor absoluto: $|f(x)-L| < \varepsilon$. (1)

La frase ***"x tiende a x_0"*** significa por un lado que la distancia entre x y x_0 es cada vez menor. Otra vez, si tomamos un valor fijo positivo, la distancia entre x y x_0 será siempre menor que este valor.

Llamemos δ a este valor fijo. Entonces $d(x;x_0) < \delta$. Usando valor absoluto: $|x - x_0| < \delta$. (2)

Por otro lado, nunca x será igual a x_0, o sea, $x \neq x_0$. En términos de distancia significa que $d(x;x_0) > 0$, o bien, $|x - x_0| > 0$. (3)

Juntando las expresiones (2) y (3) nos queda: $0 < |x - x_0| < \delta$. (4)

Ahora ya podemos escribir la <u>definición formal de límite de una función en un punto</u>, utilizando las expresiones (1) y (4), la cual nos queda así:

> Sea f una función definida en un entorno de un punto x_0 y sea L un número real.
>
> La afirmación $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L}$ (el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L) significa que:
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \quad / \quad si \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad entonces \quad |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (5)$$

Ahora veremos ejemplos que nos ayudarán a comprender mejor esta definición.

<u>Ejemplo Nro. 1</u>

Dado $\boxed{\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5) = 1}$ observemos que: $f(x) = 2x - 5$; $x_0 = 3$; $L = 1$.

Escribamos la definición (5) formal de límite para este caso:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \quad / \quad si \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad entonces \quad |2x - 5 - 1| < \varepsilon .$$

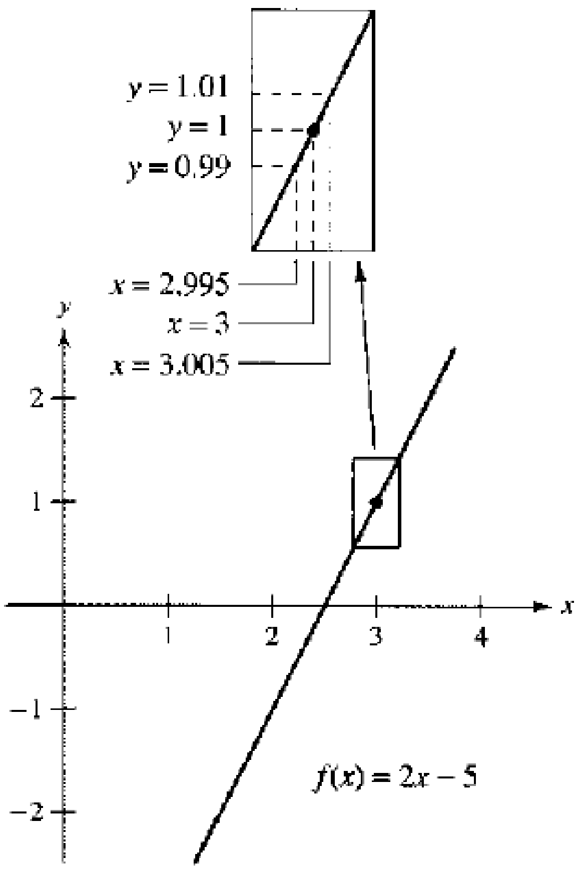
Supongamos que $\varepsilon = 0{,}01$. Tenemos que encontrar el valor de δ apropiado.

Entonces: dado ε debemos encontrar el δ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $|2x - 5 - 1| < 0{,}01$.

Como $|2x - 5 - 1| < 0{,}01 \Leftrightarrow |2x - 6| < 0{,}01 \Leftrightarrow |2(x - 3)| < 0{,}01 \Leftrightarrow |2| \cdot |x - 3| < 0{,}01 \Leftrightarrow$ $2 \cdot |x - 3| < 0{,}01 \Leftrightarrow |x - 3| < \dfrac{0{,}01}{2} \Leftrightarrow |x - 3| < 0{,}005$. Es decir que $\delta = 0{,}005$.

En este ejemplo hemos visto que dado un valor de ε, podemos hallar el valor de δ correspondiente, a fin de que se cumpla la definición de límite. Podemos afirmar entonces que: $si \quad 0 < |x - 3| < 0{,}005 \quad entonces \quad |2x - 5 - 1| < 0{,}01$.

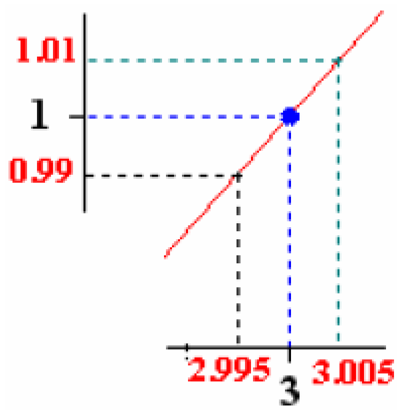
A continuación se muestra la gráfica de la función del ejemplo anterior. En el rectángulo se grafican los valores de ε y δ que cumplen que: $si \quad 0<|x-3|<0{,}005 \quad entonces \quad |2x-5-1|<0{,}01$.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 es 1

Concluyendo, en este ejemplo hemos hallado un valor de δ para un ε dado. Esto no demuestra la existencia de límite. Para demostrar eso, hay que probar que es posible encontrar un δ para cualquier valor de ε.

__Ejercicio Nro. 8__



En el siguiente gráfico se muestra la existencia del límite en un punto para cierta función f(x).

a) Completa: $\boxed{\lim\limits_{x\to} \quad f(x)=}$

b) ¿Cuánto vale ε en este caso?

c) ¿Cuánto vale δ en este caso?

d) ¿Cuál es la relación que vincula a ε con δ?

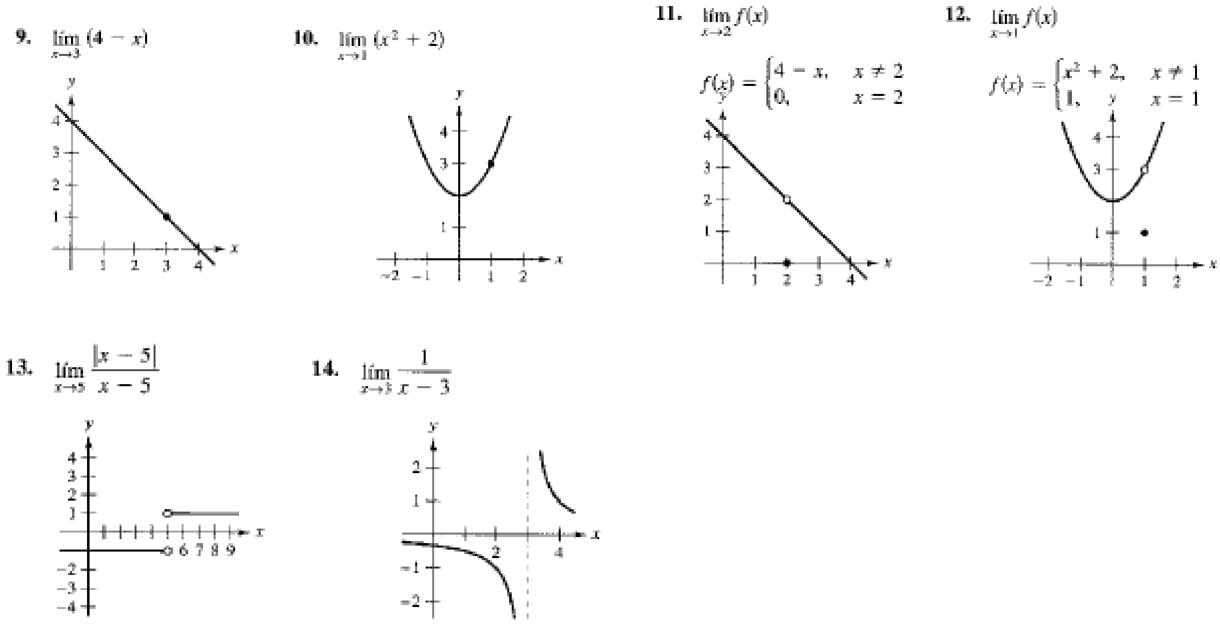
e) Escribe la definición del límite de esta función según lo respondido en los incisos anteriores.

__Ejercicio Nro. 9__

Repetir lo visto en el ejemplo Nro. 1 siendo $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}(3x+7)=13 \ \text{ y } \ \varepsilon=0{,}04}$

Ejercicio Nro. 10

Usar las gráficas para hallar el límite solicitado en cada caso. Si no existe el límite, explicar la razón.



Ejemplo Nro. 2

Demostrar que $\boxed{\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1}$

A diferencia del ejemplo Nro. 1, vamos ahora a probar que, según lo visto en (5):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ si \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ entonces \ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Aplicada esta definición a este ejemplo, nos queda:

$$\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ si \ \ 0 < |x - 3| < \delta \ \ entonces \ \ |(2x - 5) - 1| < \varepsilon$$

Como $|(2x-5)-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |2(x-3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |2| \cdot |x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$2 \cdot |x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es decir que tomando un $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ se cumplirá la definición.

De esta manera, para cada valor de ε podremos hallar fácilmente el valor de δ . Por ejemplo, si $\varepsilon = 0{,}4$ entonces $\delta = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2$. Si $\varepsilon = 0{,}01$ entonces $\delta = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$, que es el resultado al que habíamos llegado en el ejemplo Nro. 1.

Ejercicio Nro. 11

Repetir lo visto en el ejemplo Nro. 2 y demostrar que $\boxed{\lim_{x \to 2} (3x + 7) = 13}$

Límites laterales

Vamos a considerar ahora casos en los que x tiende a x_0 pero sólo con valores mayores que él, o sólo con valores menores que él.

a) Límite lateral izquierdo

Si f(x) se acerca arbitrariamente a un único número L cuando x tiende a x_0 por la izquierda (es decir, con valores menores que x_0), decimos que L es el límite lateral izquierdo de f(x) cuando x tiende a x_0 por la izquierda, y se escribe:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L}$$

Por lo tanto, la definición (5) nos queda así:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad si \quad x \in (x_0 - \delta \,;\, x_0) \quad entonces \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

b) Límite lateral derecho

Si f(x) se acerca arbitrariamente a un único número L cuando x tiende a x_0 por la derecha (es decir, con valores mayores que x_0), decimos que L es el límite lateral derecho de f(x) cuando x tiende a x_0 por la derecha, y se escribe:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L}$$

Por lo tanto, la definición (5) nos queda así:

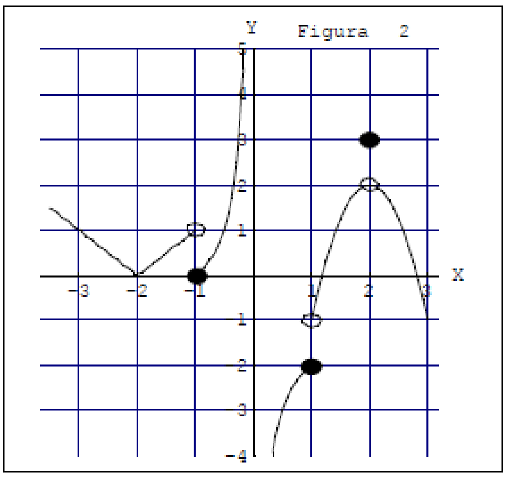
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad si \quad x \in (x_0 \,;\, x_0 + \delta) \quad entonces \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema de la existencia del límite

> Sea una función f, y x_0 y L valores reales.
> Entonces el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y es L si y sólo si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Es decir, el límite de una función en un punto existe si y solamente si sus límites laterales existen y son iguales.

Ejercicio Nro. 12
En base al gráfico responde:



$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$	$\lim_{x\to -1^+} f(x) =$	$\lim_{x\to -1} f(x) =$	$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$	$\lim_{x\to 1^+} f(x) =$
$\lim_{x\to 1} f(x) =$	$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$	$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$	$\lim_{x\to 2} f(x) =$	
$f(-1) =$	$f(1) =$	$f(2) =$		

Ejercicio Nro. 13

Graficar en cada caso una función f con dominio R tal que:

a) $\lim_{x\to 4} f(x)=1$ b) $\lim_{x\to -1} f(x)=0$ c) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-3$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x)=5$

d) Cumpla con a) y b) a la vez. e) Cumpla con a) y b) a la vez, y que f(4)=0 y f(–1)=3

f) $\lim_{x\to 1} f(x)=1/2$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$ no exista g) $\lim_{x\to 5^-} f(x)=-1$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x)=2$ y f(5)=3

Cálculo analítico de límites

Propiedades de los límites

1) El límite de una constante es la constante, es decir: $\lim_{x\to x_0} k = k$

2) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$

3) $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$

4) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $k \in R$ entonces $\lim_{x\to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$

5) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$

6) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$

7) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x) / g(x)] = L_1 / L_2$ $(L_2 \neq 0)$

8) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = L^n$ $(n \in N)$

9) Si $n \in N$ entonces $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ es válido $\forall x_0 \in R$ si n es impar, y $\forall x_0 \in R^+$ si n es par.

10) Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ y $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L)$

Ejercicio Nro. 14
Resolver utilizando propiedades, aplicando sustitución directa:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - x + 2\right)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x^3 - x + 8}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \ln\left(\dfrac{x^2 - 4}{x} + 1\right)$

Ejercicio Nro. 15
Calcular los siguientes límites usando límites laterales. Luego, graficar las funciones.

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & si \quad x \le 3 \\ 4x + 2 & si \quad x > 3 \end{cases}$ b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} \sqrt{20 - x} & si \quad x > -5 \\ -x & si \quad x < -5 \end{cases}$

Ejercicio Nro. 16
Si $\boxed{f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x \le -1 \\ x & si\ \text{-}1 < x < 1 \\ 1 - x & si\ x \ge 1 \end{cases}}$ hallar los siguientes límites y luego graficar la función:

$i) f(1) \quad ii) \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \quad iii) \lim\limits_{x\to 1+} f(x) \quad iv) \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$v) f(-1) \quad vi) \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \quad vii) \lim\limits_{x\to -1+} f(x) \quad viii) \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Límites indeterminados

No siempre es posible resolver un límite por sustitución directa, ya que en algunos casos, al sustituir x en la función por el valor al que tiende, queda lo que llamamos una "**indeterminación**".
Por ejemplo, si debemos calcular:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \ \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Vemos que si reemplazamos x por 2, se llega a $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$

La expresión 0/0 es una de las siete indeterminaciones existentes. No significa que el límite no exista, sino que debemos buscar otra manera de resolverlo.

En este caso, debemos previamente factorizar la función, aplicando diferencia de cuadrados.

Entonces:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \ \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} f(x) \ \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} f(x) \ (x + 2) = 4$$

Luego, el límite existe y es 4.

Ejercicio Nro. 17
Resolver:

a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3 + x)^2 - 9}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Límites de funciones trigonométricas

Sea x_0 un número real perteneciente al dominio de la función trigonométrica considerada. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} sen(x) = sen(x_0) \ ; \ \lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0) \ ; \ \lim_{x \to x_0} tg(x) = tg(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} ctg(x) = ctg(x_0) \ ; \ \lim_{x \to x_0} \sec(x) = \sec(x_0) \ ; \ \lim_{x \to x_0} \cos ec(x) = \cos ec(x_0)$$

Ejercicio Nro. 18

Resolver:

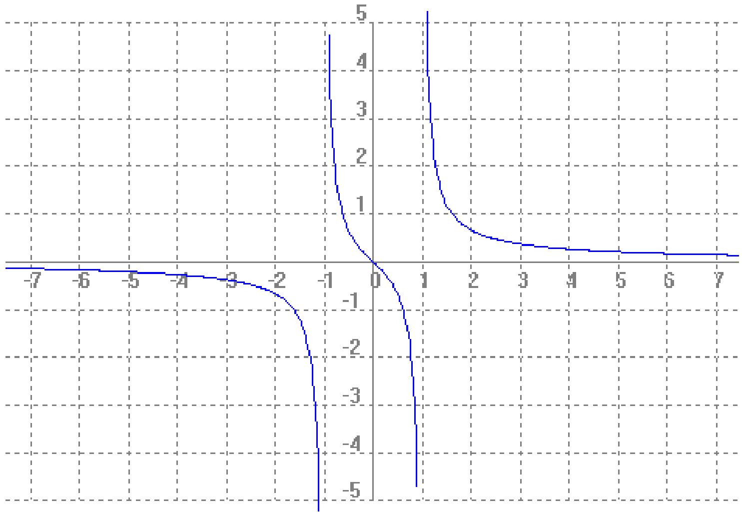
a) $\lim_{x \to 0} tg(x) =$ b) $\lim_{x \to \pi} (x \cdot \cos x) =$ c) $\lim_{x \to 0} sen^2(x) =$ d) $\lim_{x \to 1} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$

Límites infinitos

Observemos la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, cuyo dominio es $Dom = R - \{1; -1\}$

Vamos a hallar el $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 1}}$ usando los límites laterales.

Tomamos valores por derecha y por izquierda cada vez más próximos a 1, obteniendo las siguientes tablas:



x	f(x)	x	f(x)
0,1	-0,10	1,5	1,20
0,5	-0,67	1,1	5,24
0,9	-4,74	1,01	50,25
0,99	-49,75	1,001	500,25
0,999	-499,75	1,0001	5000,25
0,9999	-4999,75	1,00001	50000,25
0,99999	-49999,75	1,000001	500000,25
0,999999	-499999,75	1,0000001	5000000,25

Vemos que a medida que nos acercamos por izquierda al 1, la función decrece cada vez más, es decir, tiende a $-\infty$, y a medida que nos acercamos por derecha al 1, la función crece cada vez más, es decir, tiende a $+\infty$. Se dice entonces que los límites laterales de la función cuando $x \to 1$ son infinitos.

Por lo tanto escribimos que: $\boxed{\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty}$ y $\boxed{\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty}$

<u>Aclaración</u>: si el límite de una función cuando $x \to x_0$ da infinito entonces significa que NO EXISTE EL LIMITE de la función en ese punto. Para que el límite exista debe ser un valor FINITO.

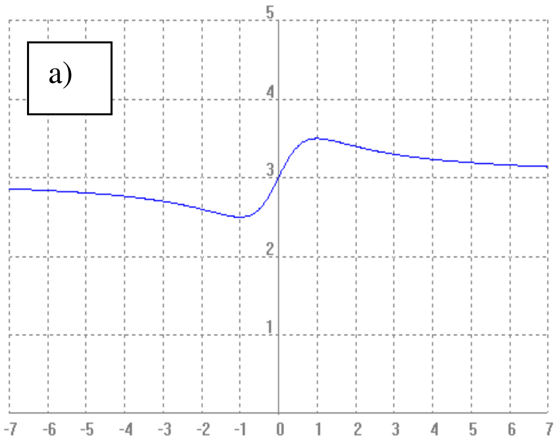
Ejercicio Nro. 19

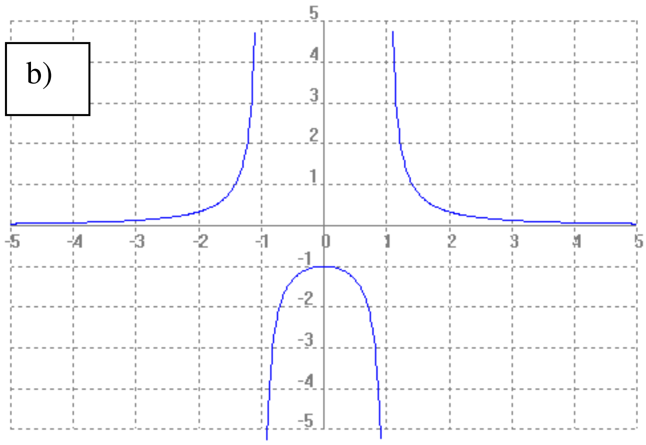
Utilizando una planilla de cálculo para armar las tablas de valores, y un graficador de funciones, confirma que los siguientes límites son infinitos:

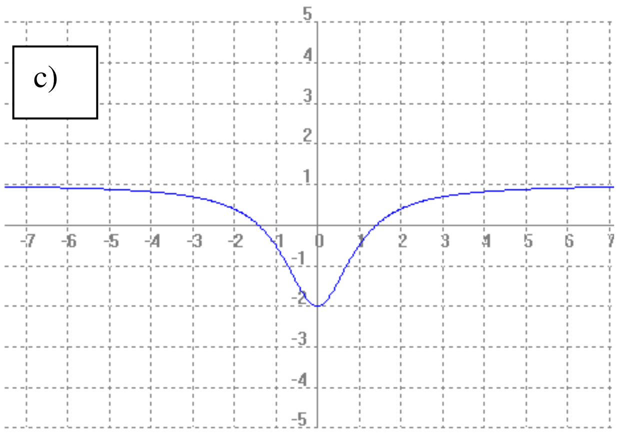
a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-4}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

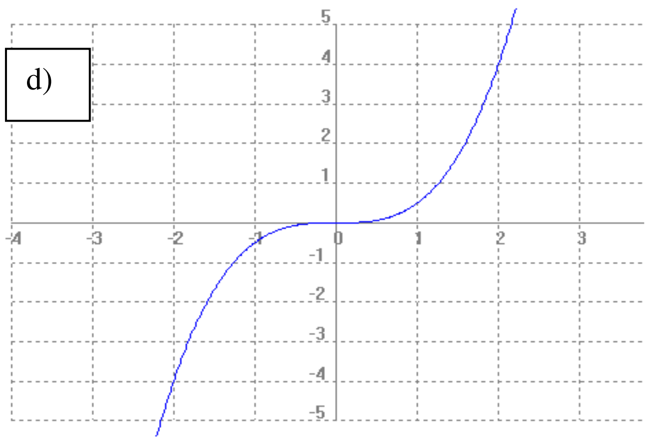
Límites en el infinito (o límites para x tendiendo a infinito)

Vamos a calcular ahora límites para los cuales x en vez de tender a un número finito, tiende a $\pm\infty$. Veamos las siguientes gráficas de ciertas funciones:









Para cada caso hallaremos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Es decir, veremos dónde se acerca la función cuando x tiende a $\pm\infty$.

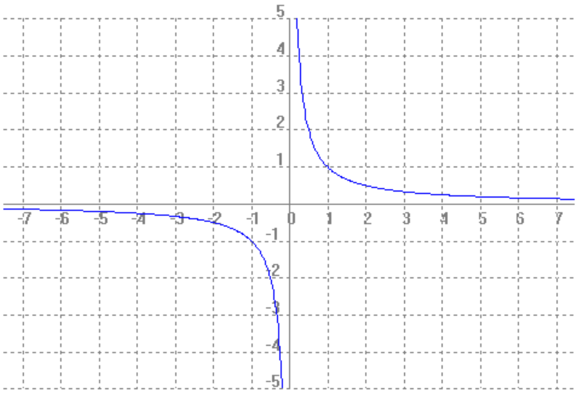
En a) vemos que cuando x crece o decrece indefinidamente la función se acerca al 3. Es decir, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$. En b) vemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

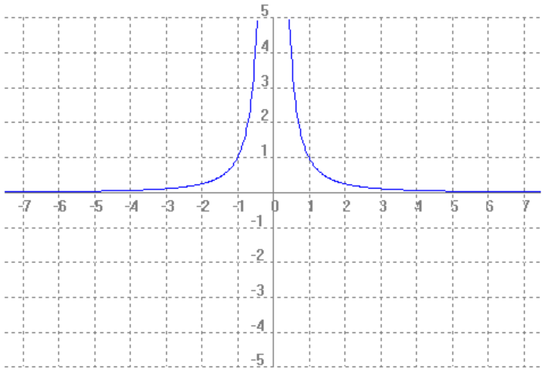
Completa:

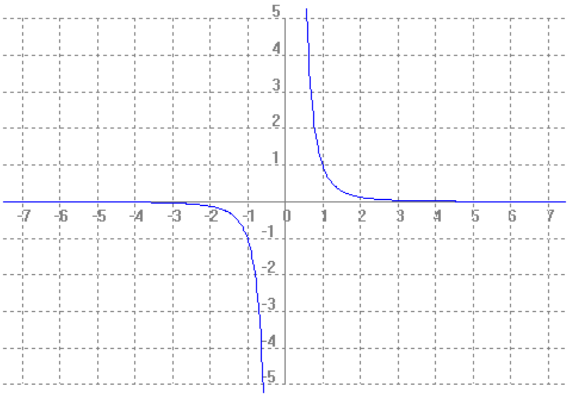
En c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

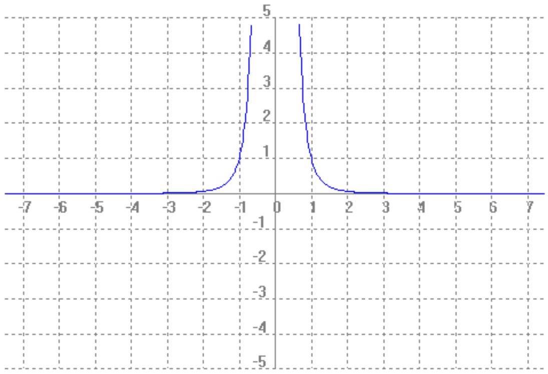
En d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

Vamos a analizar el siguiente límite: $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n}}$ donde $k \in R$ y $n \in N$. Veamos las gráficas de esta familia de funciones. Sea $k = 1$ y $n = 1,2,3,4,...$









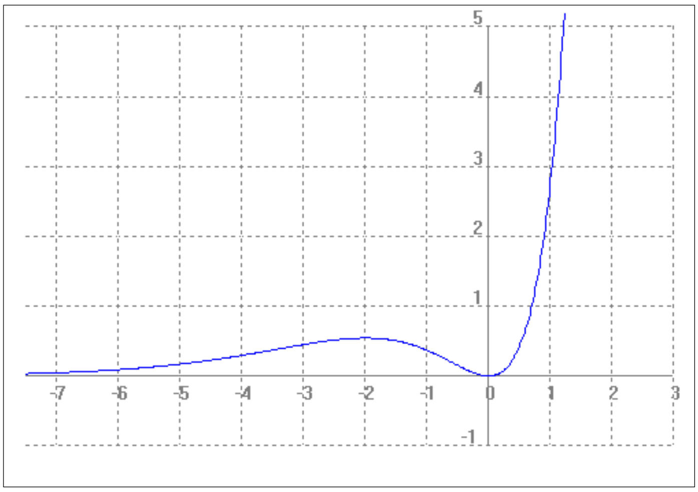
Vemos que $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$; $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0}$; $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0}$; $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} = 0}$

En general, podemos afirmar que: $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0}$

<u>Ejercicio Nro. 20</u>

Dada la siguiente función, responde basándote en el gráfico:

a) El Dominio es…..
b) El Conjunto Imagen es ….
c) La raíz es….
d) ¿Es una función par o impar?
e) ¿Es biyectiva? ¿Por qué?
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$
g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

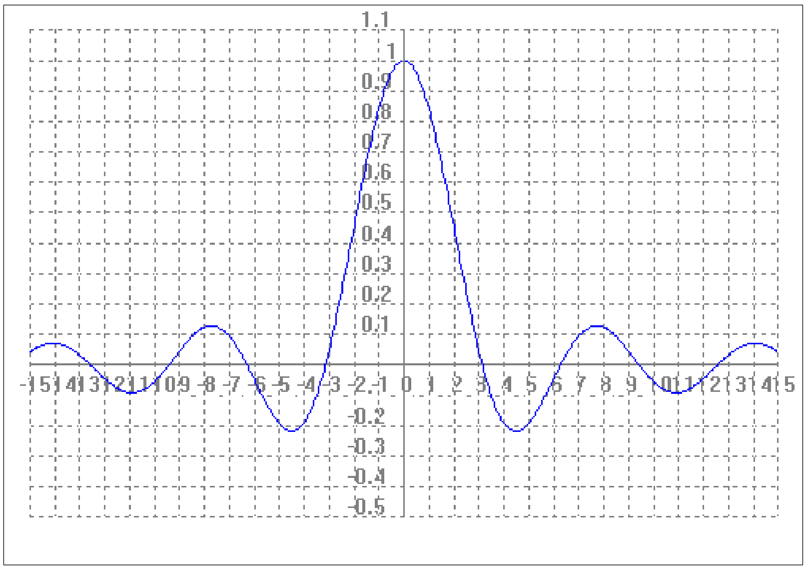


Límites especiales

A la derecha se muestra la gráfica de la función $\boxed{f(x)=\frac{senx}{x}}$ cuyo Dominio es $R-\{0\}$.

Puede demostrarse que: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1}$

(Observemos que por sustitución directa este límite tiene una indeterminación 0/0)



Ejercicio Nro. 21

Resolver utilizando el límite anterior:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen8x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen5x}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$

Otro límite especial es el siguiente:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e}$$

(Observemos que por sustitución directa este límite tiene una indeterminación 1^{∞})

Ejercicio Nro. 22

Resolver utilizando el límite anterior:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4x}$ c) $\lim_{x\to 0}(1+8x)^{2/x}$

Ejercicio Nro. 23

Inventa el gráfico de una función que cumpla lo siguiente: $\lim_{x\to 2}$ f(x) = +∞ , $\lim_{x\to -1^{+}}$ f(x) = +∞ y $\lim_{x\to -1^{-}}$ f(x) = –∞. Luego indica el dominio de dicha función.

Límites con indeterminación ∞/∞

Supongamos que queremos calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+8x-6}{x^2+2}$

Por sustitución directa obtenemos la indeterminación ∞/∞. En este caso procedemos de la siguiente manera: primero se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que tenga la función, en este caso, x^2.

Nos queda: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+8x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{3x^2+8x-6}{x^2}}{\dfrac{x^2+2}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{8x}{x^2}-\dfrac{6}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}$

Simplificamos en cada cociente: $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\dfrac{8}{x}-\dfrac{6}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}}$

Recordando que: $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{k}{x^n} = 0}$ nos queda: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\dfrac{8}{x}-\dfrac{6}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}} = \dfrac{3}{1} = 3$

Ejercicio Nro. 24

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-4x+1}{9x^3+2x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2+10x+1}{x+7}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x+7}{x^3-1}$

Límites con indeterminación ∞–∞

Para resolver estos límites debemos multiplicar y dividir por el conjugado de la función dada.

Ejercicio Nro. 25

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)$

Ejercicio Nro. 26

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-8}{2x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3+2}{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+4x-2}{4x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{x+5}}{4-x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{tg(x-3)}{3x-9}$ g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1-\dfrac{6}{4x}\right)^{\frac{x}{2}}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x}$ j) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x^2+3x}$ k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$ l) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x^2+2x}$ n) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+4x-21}{x-3}$ ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+5x^3+1}$ o) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2-36}{x^2-8x+12}$